

Premessa

Lo scopo di questo volumetto è di offrire uno strumento didattico complementare per i corsi di meccanica e dinamica dei fluidi, termofluidodinamica e fenomeni di trasporto, trasmissione del calore e diffusione di massa, aerodinamica, etc., nell'ambito di diversi corsi di laurea specialistica o anche di laurea triennale in vari rami dell'ingegneria. Le materie citate formano un insieme di discipline scientifiche così ampio e ricco di applicazioni che risulta impossibile contenerne gli svariati aspetti in una singola opera didattica. Nella stesura di questo volumetto ci siamo riproposti di raccogliere soltanto le nozioni di base ed i fondamenti concettuali e matematici che costituiscono i rudimenti comuni per l'impostazione rigorosa dell'analisi tecnica, ingegneristica e scientifica dei fenomeni di trasporto di quantità di moto e di energia nei fluidi. All'Università di Brescia, il corso di Dinamica dei Fluidi nell'ambito del corso di laurea specialistica (o magistrale) in ingegneria meccanica, si prefigge esattamente questo obiettivo, propedeutico a corsi successivi che trattano diverse applicazioni o metodi (Macchine a Fluido, Turbomacchine, Trasmissione del Calore, Termodinamica Applicata, Trasporto di Massa, Termofluidodinamica Numerica), ma anche formativo e metodologico per se, oltre che complementare e di completamento degli studi precedenti di termodinamica (bilanci di energia ed entropia per fluidi in moto). Il volume è tratto dagli appunti delle lezioni del corso di Termofluidodinamica Applicata che l'autore ha tenuto per quindici anni nell'ambito del corso di laurea in Ingegneria Meccanica, di quello che oggi viene definito Vecchio Ordinamento degli studi universitari. La stesura non sarebbe stata possibile senza la paziente collaborazione ed accurata opera di rielaborazione degli appunti, stesura in forma scritta ed approfondimento che la dr.ssa Monica Zuccoli ha accettato come obiettivo della sua tesi di laurea in Ingegneria Meccanica, i cui primi capitoli coincidono interamente con la prima versione preliminare di questo testo, dato alla stampa incompleto e con una certa fretta in concomitanza con l'avvio del corso di Dinamica dei Fluidi per il primo anno di laurea specialistica in ingegneria meccanica secondo il Nuovo Ordinamento degli studi. L'impostazione risente dell'influenza degli insegnamenti che l'autore ha ricevuto dai proff. Ain A. Sonin e Warren Rohsenow, degli approfondimenti e suggerimenti che il prof. Adriano Lezzi ha contribuito negli anni in cui ha collaborato all'insegnamento del corso di Termofluidodinamica Applicata, e della lettura dei testi classici del settore. L'autore conta sul prezioso contributo che i colleghi interessati e gli studenti più motivati vorranno fornire e sulla collaborazione dei proff. Adriano Lezzi, Mariagrazia Pilotelli e Pietro Poesio, che condividono e condivideranno in tutto o in parte la responsabilità didattica del corso di Dinamica dei

Fluidi in questa fase di avviamento, per individuare e suggerire correzioni, modifiche, integrazioni che conducano ad una prossima edizione più completa, condivisa e rispondente agli obiettivi enunciati, nella piena consapevolezza che ogni singolo libro sulla termofluidodinamica non può che contenere una veduta estremamente parziale e che l'obbiettivo principale del presente è di fornire un'introduzione al formalismo analitico, alle nozioni fisiche di base ed ai collegamenti con la termodinamica, sufficiente ad affrontare con tranquillità lo studio di testi e articoli di interesse attingendo dall'immensa letteratura scientifica disponibile.

Gian Paolo Beretta
beretta@ing.unibs.it
Brescia, Marzo 2005

Indice

Premessa	I
1. Concetti di base e richiami di analisi	1
1.1 Ipotesi di continuità	1
1.2 Ipotesi di quasi-equilibrio locale	3
1.3 Descrizione lagrangiana ed euleriana del flusso	4
1.4 Relazione fra campo di accelerazione e campo di velocità	8
1.5 Richiami di analisi vettoriale	11
1.5.1 Vettori in \mathbb{R}^3	11
1.5.2 Tensori doppi su \mathbb{R}^3	12
1.5.3 Gradiente	16
1.5.4 Divergenza	18
1.5.5 Simbolo di Levi-Civita	19
1.5.6 Rotore	20
1.5.7 Laplaciano	20
1.5.8 Alcune identità notevoli	21
1.5.9 Formule integrali di Gauss-Green e Stokes	21
1.6 Memoradum (repetita iuvant)	22
2. Equazioni di bilancio in forma integrale	27
2.1 Diffusione termica, di quantità di moto, di quantità di costituenti	27
2.2 Volume materiale	29
2.3 Bilancio di massa	30
2.4 Bilancio della quantità di moto	31
2.5 Bilancio del momento della quantità di moto	32
2.6 Bilancio di energia	33
2.7 Bilancio di entropia	35
2.8 Teorema del trasporto (o di Reynolds)	36
2.9 Dimostrazione del teorema del trasporto	39
2.10 Bilanci per un volume di controllo	43
2.11 Bilanci per un sistema aperto	45
2.12 Equazione globale di bilancio della quantità di moto	49
2.13 Memoradum (repetita iuvant)	50

3. Equazioni di bilancio in forma indefinita	53
3.1 Equazione di continuità	53
3.2 Tensore degli sforzi	55
3.3 Equazione indefinita del moto	60
3.4 Il problema del moto per un fluido	62
3.5 Tensore della rapidità delle deformazioni	64
3.6 Tensore delle deformazioni	69
3.7 L'equazione costitutiva. Fluidi newtoniani	71
3.8 Cenni sull'equazione costitutiva di un fluido viscoelastico	77
3.9 Equazione di Navier-Stokes	78
3.10 Equazione del moto rispetto a un sistema non-inerziale	81
3.11 Equazione indefinita della vorticità	82
3.12 Equazione indefinita dell'entropia	85
3.13 Equazione indefinita dell'energia	87
3.14 Dissipazione viscosa e equazioni indefinite per energia interna e energia meccanica	88
3.15 Equazioni indefinite per entalpia e temperatura	91
3.16 Adimensionalizzazione delle equazioni indefinite	95
3.17 Numero di Mach per un flusso incomprimibile	100
3.18 Memoradum (repetita iuvant)	101
4. Statica dei fluidi	105
4.1 Statica relativa	105
4.2 Statica in un riferimento inerziale	111
4.3 Tensione superficiale	114
4.4 Capillarità	114
4.5 Memoradum (repetita iuvant)	114
5. Dinamica dei flussi ideali	115
5.1 Teorema di Bernoulli	118
5.2 Implicazioni del teorema di Bernoulli	124
5.3 Flussi a potenziale	127
5.4 Applicazioni del teorema di Bernoulli	128
5.5 Memorandum (repetita iuvant)	134
6. Flussi viscosi	137
6.1 Creeping flow	137
6.2 Moto alla Couette-Poiseuille fra due lastre piane	138
6.2.1 Profilo di velocità	138
6.2.2 Profilo di temperatura	145
6.3 Flussi localmente pienamente sviluppati quasi senza inerzia	151
6.4 Elementi di teoria della lubrificazione	155
6.5 Moto alla Poiseuille in un condotto cilindrico	159
6.5.1 Profilo di velocità	159
6.5.2 Profilo di temperatura	162

6.6	Il problema di Rayleigh	166
6.7	Il problema dello strato limite	171
6.8	Il problema di Blasius	174
6.8.1	Profilo di velocità nello strato limite	176
6.8.2	Profilo di temperatura nello strato limite	180
6.8.3	Analogia di Reynolds tra sforzo alla parete e flusso termico specifico.	182
6.9	Metodo approssimato di von Karman-Pohlhausen e Thwaites	184
6.9.1	Calcolo dello spessore dello strato limite del campo di velocità δ	184
6.9.2	Approssimazioni della forma del profilo	187
6.9.3	Equazione di von Karman	190
6.9.4	Applicazioni dell'equazione di von Karman: caso di Blasius .	193
6.9.5	Applicazioni dell'equazione di von Karman: caso di Rayleigh	194
6.9.6	Lunghezza di avviamento	195
6.9.7	Metodo di Thwaites per flusso stazionario	199
6.9.8	Calcolo dello spessore dello strato limite del campo di temperatura δ_T	201
6.9.9	Equazione di von Karman: metodo alternativo per determinarla	208
6.10	Scie laminari	210
6.11	Getto laminare	213
6.12	Memorandum (repetita iuvant)	217
A.	Equazioni indefinite in coordinate cilindriche	221

Concetti di base e richiami di analisi

In questo capitolo introduttivo, oltre ad una discussione sulle ipotesi del continuo e del quasi-equilibrio locale che stanno alla base di tutta la meccanica e termofluidodinamica del continuo, presentiamo un'ampia sezione di richiami di analisi (vettori, tensori, operatori differenziali) che vengono utili man mano nei capitoli successivi e che costituiscono un bagaglio di nozioni (e anche di notazioni) necessarie per affrontare lo studio di libri e articoli scientifici nel campo vastissimo della dinamica dei fluidi, della termofluidodinamica e della reologia.

1.1 Ipotesi di continuità

La materia è costituita da particelle aventi massa concentrata. Anche negli stati di aggregazione più densi (solido e liquido) fra le particelle è presente un enorme spazio (enorme rispetto alle loro dimensioni). Ma nella maggior parte dei casi le particelle sono talmente tante che anche nel più piccolo volume - piccolo in confronto al fenomeno in esame - è contenuto un numero così elevato di particelle che non si commette errore a ritenere la massa distribuita uniformemente. In termini più rigorosi: dato un sistema che occupa un volume V e contiene una massa m , si definisce *densità media* del sistema il rapporto

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1.1)$$

Nel modello di *sistema continuo*, per ogni punto P appartenente ad una data parte del sistema, si assume una *densità puntuale* pari a quella media che prevale in un intorno di P sufficientemente grande da contenere un elevato numero di particelle, ma sufficientemente piccolo da poter essere considerato “infinitesimo” rispetto alla scala del fenomeno di interesse. Indicando con λ il *libero cammino medio*, ovvero la distanza percorsa in media dalle molecole tra due collisioni successive con altre molecole, possiamo dire che se λ è molto più piccolo della più piccola scala di interesse nel fenomeno studiato, l'ipotesi di continuità può ritenersi valida. Specificiamo che cosa si intende per “molto più piccolo”. Per farlo ci serve il concetto

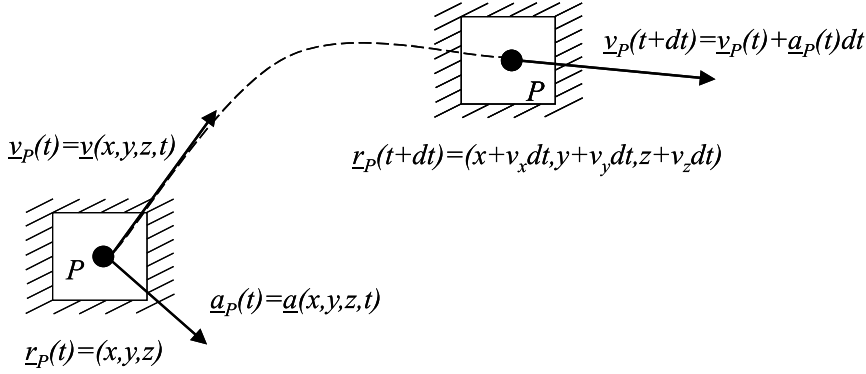


Figura 1.5: due posizioni successive occupate da una stessa particella negli istanti t e $t+dt$.

1.4 Relazione fra campo di accelerazione e campo di velocità

Introdotta la modalità di descrizione euleriana, si vuole ora esprimere in tale contesto le leggi note dalla fisica, ad esempio la legge di Newton $\underline{F}_P = m \underline{a}_P$, che, così com'è, è scritta in termini lagrangiani. Si tratta di determinare la relazione matematica tra campo di velocità e campo di accelerazione considerati da un punto di vista euleriano. Consideriamo un elemento infinitesimo P del sistema continuo e, fissato un sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z) , sia $\underline{r}_P(t) = (x, y, z)$ la sua posizione in un generico istante t (Figura 1.5).

In termini lagrangiani, l'elemento P si trova all'istante t nella posizione $\underline{r}_P(t) = (x, y, z)$ e, pertanto, in virtù della definizione del punto di vista euleriano, la sua velocità e la sua accelerazione all'istante t coincidono con i valori del campo di velocità e del campo di accelerazione al tempo t nel punto (x, y, z) ; rispettivamente, dunque

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}(x, y, z, t) \quad (1.11)$$

$$\underline{a}_P(t) = \underline{a}(x, y, z, t). \quad (1.12)$$

Al tempo $t+dt$ l'elemento P si trova nella posizione

$$\underline{r}_P(t+dt) = \underline{r}_P(t) + \underline{v}_P(t)dt \quad (1.13)$$

con velocità

$$\underline{v}_P(t+dt) = \underline{v}_P(t) + \underline{a}_P(t)dt. \quad (1.14)$$

Utilizzando la (1.11) nella (1.13) e indicando le componenti del campo di velocità con $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$ e $v_z(x, y, z, t)$, la posizione dell'elemento P al tempo $t+dt$ può essere ricavata dal campo di velocità,

$$\begin{aligned} \underline{r}_P(t+dt) &= \underline{r}_P(t) + \underline{v}(x, y, z, t)dt \\ &= (x, y, z) + (v_x, v_y, v_z)dt \\ &= (x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt). \end{aligned} \quad (1.15)$$

In tale punto, il valore del campo di velocità al tempo $t + dt$ coincide con la velocità dell'elemento P ,

$$\underline{v}_P(t+dt) = \underline{v}(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t+dt). \quad (1.16)$$

Sviluppando in serie di Taylor tale funzione nell'intorno del punto (x, y, z, t) e troncando al primo termine, si ha

$$\underline{v}_P(t+dt) = \underline{v}(x, y, z, t) + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} dt. \quad (1.17)$$

Unendo questa con la (1.12) e la (1.14) si trova che

$$\underline{a}(x, y, z, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}. \quad (1.18)$$

Questa espressione del campo di accelerazione possiamo riscriverla nella forma

$$a_j \underline{e}_j = v_i v_{j,i} \underline{e}_j + \frac{\partial v_j}{\partial t} \underline{e}_j \quad (1.19)$$

dove $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ indica la terna di versori $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ associata alla terna cartesiana scelta, dove facciamo uso delle nozioni di analisi e delle notazioni usuali della termofluidodinamica che vengono richiamate nella Sezione 1.5². Osservando che vale l'identità

$$v_i v_{j,i} \underline{e}_j = v_{j,k} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \cdot v_i \underline{e}_i \quad (1.20)$$

e tornando alla notazione vettoriale, otteniamo la forma

$$\underline{a} = \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{v}) + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \frac{D \underline{v}}{Dt} \quad (1.21)$$

avendo indicato

$$(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{v}) = v_x \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \underline{v}}{\partial z}. \quad (1.22)$$

Con il simbolo $(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) (-)$ indichiamo pertanto l'operatore differenziale

$$(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) (-) = v_x \frac{\partial (-)}{\partial x} + v_y \frac{\partial (-)}{\partial y} + v_z \frac{\partial (-)}{\partial z} \quad (1.23)$$

indicato con il simbolo $\underline{v} \cdot \underline{\nabla}$ in analogia con la definizione di prodotto scalare di due vettori. Dunque il campo di accelerazione è dato non solo dalla derivata di \underline{v} rispetto al tempo, ma anche dal termine detto *convettivo* $(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{v})$, la cui presenza è dovuta appunto al fatto che il rapporto incrementale è calcolato seguendo il moto dell'elemento del continuo. L'ultima espressione a destra della

² Sin d'ora e per tutto il resto del testo, utilizziamo tali nozioni e notazioni senza espliciti richiami alla Sezione 1.5 dove il lettore di volta in volta trova i chiarimenti necessari. Si consiglia quindi di affrontare subito una prima rapida lettura della Sezione 1.5 per prendere visione dei richiami che man mano risultano utili nello studio dei successivi capitoli.

del campo scalare Φ . Con il simbolo $\underline{\underline{\nabla\nabla}}(-) = \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}(-)$ indichiamo quindi l'operatore Hessiano definito appunto da

$$\underline{\underline{\nabla\nabla}}(-) = \frac{\partial^2(-)}{\partial x_i \partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = (-)_{,ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad . \quad (1.80)$$

Per evitare confusioni, esprimiamo le diadiche utilizzando il simbolo “ \otimes ” di prodotto tensoriale o esterno, anche se la notazione che omette tale simbolo e semplicemente affianca due vettori è equivalente e più snella. In molti testi è usuale infatti la notazione $\underline{a}\underline{b}$ per indicare $\underline{a} \otimes \underline{b}$. Ad esempio, il tensore che più avanti indichiamo con \underline{vv} è definito da $\underline{vv} = \underline{v} \otimes \underline{v}$ e, con la notazione semplificata, può essere indicato con $\underline{v}\underline{v}$, $\underline{vv} = \underline{v}\underline{v} = \underline{v} \otimes \underline{v} = v_i v_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$. Analogamente, l'operatore $\underline{\underline{\nabla\nabla}}$ appena definito può essere indicato con $\underline{\nabla}\underline{\nabla}$, e l'operatore $\underline{\underline{\nabla v}}$ con $\underline{\nabla}\underline{v}$, $\underline{\underline{\nabla v}} = \underline{\nabla}\underline{v} = \underline{\nabla} \otimes \underline{v} = (\partial v_j / \partial x_i) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$.

1.5.4 Divergenza

La divergenza è un operatore differenziale il cui simbolo è $\underline{\nabla} \cdot (-)$ e associa ad una funzione vettoriale (1.75) la funzione scalare

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\Psi} = \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} = \Psi_{i,i} \quad . \quad (1.81)$$

La divergenza di $\underline{\Psi}$ viene spesso indicata anche con il simbolo $\text{div } \underline{\Psi}$.

Se la funzione è tensoriale del secondo ordine $\underline{\underline{\Pi}}(x, y, z) = \Pi_{ij}(x_1, x_2, x_3) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ con $i, j = 1, 2, 3$, la sua divergenza non è unica, ma ne esistono due differenti, ciascuna costituita da un vettore:

- un vettore ottenuto derivando rispetto al primo indice di Π_{ij} ,

$$\underline{\nabla}_1 \cdot \underline{\underline{\Pi}} = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_i} \underline{e}_j = \Pi_{ij,i} \underline{e}_j \quad . \quad (1.82)$$

Di questo vettore la j -esima componente è $(\underline{\nabla}_1 \cdot \underline{\underline{\Pi}})_j = \Pi_{ij,i}$ ed è in un certo senso la definizione di divergenza più coerente con la convenzione adottata di prodotto scalare da sinistra del vettore $\underline{\nabla}$ definito dalla (1.73),

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Pi}} &= \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \Pi_{kj} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_j = (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k) \frac{\partial \Pi_{kj}}{\partial x_i} \underline{e}_j = \\ &= \delta_{ik} \frac{\partial \Pi_{kj}}{\partial x_i} \underline{e}_j = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_i} \underline{e}_j = \Pi_{ij,i} \underline{e}_j \quad . \end{aligned} \quad (1.83)$$

- il secondo vettore si ottiene derivando invece rispetto al secondo indice di $\underline{\underline{\Pi}}$,

$$\underline{\nabla}_2 \cdot \underline{\underline{\Pi}} = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = \Pi_{ij,j} \underline{e}_i \quad . \quad (1.84)$$

E' facile verificare l'identità

$$\nabla_2 \cdot \underline{\underline{\Pi}} = \nabla_1 \cdot \underline{\underline{\Pi}}^\dagger \quad . \quad (1.85)$$

Se il tensore $\underline{\underline{\Pi}}$ è simmetrico⁹ le due divergenze coincidono,

$$\nabla_1 \cdot \underline{\underline{\Pi}} = \nabla_2 \cdot \underline{\underline{\Pi}}, \quad (1.86)$$

ossia

$$\Pi_{ij,i} \underline{\underline{e}}_j = \Pi_{ij,j} \underline{\underline{e}}_i. \quad (1.87)$$

In tal caso si scrive semplicemente

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} \quad (1.88)$$

per indicare la divergenza del tensore doppio simmetrico $\underline{\underline{\Pi}}$, scrittura non ambigua grazie all'osservazione sopra. Pertanto, se $\underline{\Psi}$ è un campo vettoriale e $\underline{\underline{\Pi}}$ un campo tensoriale simmetrico, si può scrivere:

$$\nabla \cdot \underline{\Psi} = \Psi_{i,i} \quad (1.89)$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} = \Pi_{ij,i} \underline{\underline{e}}_j \quad (1.90)$$

nelle notazioni di cui sopra.

1.5.5 Simbolo di Levi-Civita

Il simbolo di Levi-Civita (o simbolo di permutazione) è definito come segue:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se due indici sono uguali tra loro} \\ +1 & \text{se } ijk \text{ è una permutazione pari di } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{se } ijk \text{ è una permutazione dispari di } 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.91)$$

per cui ad esempio

$$\begin{aligned} \epsilon_{122} &= \epsilon_{313} = \epsilon_{211} = \dots = 0 \\ \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1 \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \quad . \end{aligned} \quad (1.92)$$

Valgono le seguenti identità $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$ e più in generale

$$\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3} = \det [\delta_{\alpha_i\beta_j}] \quad (1.93)$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker.

Un'interessante identità che ha originato il simbolo di Levi-Civita e costituisce un modo compatto di rappresentare il determinante di una matrice è la seguente

$$\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{B}} \times \underline{\underline{C}}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \quad (1.94)$$

⁹ Un tensore $\underline{\underline{A}} = A_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j$ è simmetrico se $A_{ij} = A_{ji}$.

$$\int_{\mathcal{V}} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} dV = \int_{\mathcal{S}} \underline{v} \cdot \underline{n} dA \quad (1.112)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla^2 \Phi dV = \int_{\mathcal{S}} (\underline{\nabla} \Phi) \cdot \underline{n} dA \quad (1.113)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \underline{\nabla} \times \underline{v} dV = \int_{\mathcal{S}} \underline{n} \times \underline{v} dA \quad (1.114)$$

dove Φ è una funzione scalare, mentre \underline{v} è una funzione vettoriale, entrambe nelle variabili (x, y, z) . La (1.112) è il cosiddetto *Teorema di Gauss-Green* o *Teorema della divergenza*. Inoltre vale l'identità, detta *formula di Stokes*,

$$\int_{\mathcal{S}} (\underline{\nabla} \times \underline{v}) \cdot \underline{n} dA = \oint_{\mathcal{C}} \underline{v} \cdot \underline{i}_s ds \quad (1.115)$$

dove \oint rappresenta l'integrale di linea effettuato lungo una curva chiusa \mathcal{C} , sulla quale è definita la coordinata curvilinea s e \underline{i}_s denota il versore tangente alla curva e \mathcal{S} è una qualsiasi superficie della quale \mathcal{C} sia il contorno. Tale integrale prende il nome di *circolazione* del vettore \underline{v} lungo la curva chiusa.

Per una funzione tensoriale $\underline{\underline{\Pi}}$ valgono le relazioni, conseguenze della (1.112) e della (1.114),

$$\int_{\mathcal{V}} \underline{\nabla}_1 \cdot \underline{\underline{\Pi}} dV = \int_{\mathcal{S}} \underline{n} \cdot \underline{\underline{\Pi}} dA \quad (1.116)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \underline{\nabla}_2 \cdot \underline{\underline{\Pi}} dV = \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{n} dA \quad (1.117)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \underline{\nabla}_1 \times \underline{\underline{\Pi}} dV = \int_{\mathcal{S}} \underline{n} \times \underline{\underline{\Pi}} dA \quad (1.118)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \underline{\nabla}_2 \times \underline{\underline{\Pi}} dV = - \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\Pi}} \times \underline{n} dA \quad (1.119)$$

1.6 Memorandum (repetita iuvant)

1. Le ipotesi che stanno alla base di tutta la meccanica e la termofluidodinamica:

- *Ipotesi di continuità*: si ritiene distribuita uniformemente la massa del sistema materiale, perui si può definire la funzione di densità puntuale $\rho = \rho(P)$ per ogni punto P del sistema.
- *Ipotesi di quasi-equilibrio locale*: gli elementi di fluido che costituiscono il sistema sono in stati di non-equilibrio molto vicini a stati di flusso di massa, per cui ognuno di tali elementi può essere caratterizzato dalle

proprietà termodinamiche proprie dello stato di flusso di massa ad esso associato (velocità, composizione, temperatura, pressione, potenziali chimici dei costituenti).

2. *Descrizione lagrangiana* del moto di un sistema: segue il moto delle singole particelle di cui è costituito il corpo continuo, quindi i vettori posizione, velocità, accelerazione sono rivisti come funzioni di t , fissata una particella del continuo stesso

$$\underline{r}_P(t), \underline{v}_P(t), \underline{a}_P(t) \quad (1.120)$$

per ogni punto P del continuo e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Questo tipo di descrizione è usato per i sistemi rigidi.

3. *Descrizione euleriana* del moto di un sistema: le grandezze legate al moto del continuo sono riferite, oltre che al tempo, anche ad un punto dello spazio geometrico

$$\underline{v}(x, y, z, t), \underline{a}(x, y, z, t), T(x, y, z, t), \text{ etc.} \quad (1.121)$$

con $(x, y, z, t) = \underline{r}_P(t)$ e $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

4. A livello teorico è opportuno distinguere tre tipi di curve che caratterizzano il moto di un fluido:

- la *traiettoria* (pathline) di un elemento di fluido è la curva in \mathbb{R}^3 definita da $\underline{r}_P(t)$ e tracciata nel tempo dall'insieme dei punti dello spazio per cui passa il dato elemento durante il suo moto;
- la *linea di flusso* (streamline) è una curva in \mathbb{R}^3 che in ogni suo punto risulta tangente al campo di velocità del continuo ad un dato istante di tempo (anche detta linea di corrente);
- la *linea di fumo* (streakline) è una curva in \mathbb{R}^3 che unisce tutti i punti dello spazio occupati ad un dato istante di tempo t dalle particelle che sono passate per un certo punto fissato dello spazio \bar{P} nell'intervallo di tempo (\bar{t}, t) (anche detta linea di traccia).

5. Relazione tra campo di accelerazione e campo di velocità:

$$\text{descrizione lagrangiana} \quad \underline{a}_P(t) = \frac{d\underline{v}_P}{dt}(t) \quad (1.122)$$

per una particella P del continuo fissata; mentre per $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ si ha

$$\text{descrizione euleriana} \quad \underline{a}(x, y, z, t) = \frac{D\underline{v}}{Dt}(x, y, z, t) \quad (1.123)$$

dove

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \quad (1.124)$$

è la derivata materiale di \underline{v} .

Equazioni di bilancio in forma integrale

Un continuo si dice *fluido* se non è in grado di opporre sforzo di taglio quando è a riposo rispetto ad un qualunque sistema di coordinate. In altre parole, se ad un fluido in quiete viene applicato uno sforzo di taglio, anche infinitesimo, esso si mette in moto.

A parità di sforzo applicato, due fluidi diversi si mettono in moto a velocità diverse: quello con viscosità maggiore si deformerà meno rapidamente, intendendo con “viscosità” l’attrito interno al fluido stesso (per una definizione più rigorosa si veda la definizione di fluido Newtoniano più avanti) o, meglio, il coefficiente di diffusione della quantità di moto, come discusso nel prossimo paragrafo.

Come in tutta la fisica, anche in fluidodinamica sono di fondamentale importanza le equazioni di bilancio di massa, di quantità di moto, di energia, di momento della quantità di moto, di entropia, e di quantità (moli) dei diversi costituenti del fluido. In questo capitolo tali equazioni vengono dapprima introdotte in forma lagrangiana, per poi essere riscritte in quella euleriana al fine di renderle più semplici da trattare da un punto di vista matematico. Le equazioni di bilancio permettono di correlare, in funzione di posizione e tempo, le variazioni delle proprietà appena citate con i flussi delle stesse proprietà che si ingenerano nel fluido in presenza di condizioni di disuniformità di proprietà coniugate, quali le concentrazioni dei diversi costituenti, la velocità, la temperatura e la velocità angolare.

2.1 Diffusione termica, di quantità di moto, di quantità di costituenti

In termodinamica è definita l’interazione di tipo *calore* come la modalità di scambio di energia fra sistemi adiacenti in stati di equilibrio stabile con differenza di temperatura infinitesima. In termofluidodinamica la stessa definizione può essere estesa ad elementi di fluido adiacenti in stato di quasi-equilibrio locale (vedi Sezione (1.2) con differenza di temperatura infinitesima. Chiamiamo tale modalità di interazione *diffusione termica*. Poiché in genere elementi di fluido adiacenti possono

- Forze di interazione tra coppie di elementi interni al volume $\mathcal{V}_m(t)$; per la legge di “azione e reazione” la loro somma dà contributo nullo alla risultante.
- Forze di interazione tra gli elementi di fluido appartenenti alla superficie $\mathcal{A}_m(t)$ che delimita il volume $\mathcal{V}_m(t)$ ed elementi di fluido esterni (o elementi di solido esterni, se attraverso qualche porzione della superficie \mathcal{A}_m il fluido sia in contatto con un solido): la loro risultante è, in genere, non nulla ed è espressa dall'integrale

$$\int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{\sigma} dA = \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{\sigma}(x, y, z, t) dx dy dz, \quad (2.17)$$

dove $\underline{\sigma}$ indica le forze per unità di area applicate, attraverso la superficie $\mathcal{A}_m(t)$ alla parte di fluido contenuta nel volume materiale $\mathcal{V}_m(t)$, dovute agli strati esterni ma adiacenti di fluido (la parte del fluido che non sta in $\mathcal{V}_m(t)$) ed agli eventuali contorni solidi presenti (ad esempio le pareti del condotto entro cui avviene il flusso). Queste sono forze che esercitano la loro azione per contatto.

- Sul fluido possono agire anche forze di volume, a cui sono soggetti tutti gli elementi di fluido. Si tratta di forze la cui azione si esplica a distanza. In questo contesto tali forze sono costituite essenzialmente dalle forze peso: se \underline{G} è l'accelerazione di gravità, $\underline{G}\rho dV$ è il peso di un elemento di fluido, dunque il peso del fluido contenuto in $\mathcal{V}_m(t)$ è

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \underline{G} dV. \quad (2.18)$$

Dall'equazione (2.16), l'espressione lagrangiana del bilancio della quantità di moto assume dunque la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \underline{v} dV = \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{\sigma} dA + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \underline{G} dV \quad (2.19)$$

ed è valida purchè \underline{v} sia la velocità rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

2.5 Bilancio del momento della quantità di moto

Si definisce *momento della quantità di moto* per un punto materiale P di massa m , rispetto ad un punto fissato dello spazio O , il vettore

$$\underline{r}_P \times \frac{d}{dt}(m \underline{v}_P), \quad (2.20)$$

dove $\underline{r}_P = (P - O)$ è il vettore posizione di P rispetto ad O . Poichè $d\underline{r}_P/dt = \underline{v}_P$ e il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo, risulta

$$\frac{d}{dt}(\underline{r}_P \times m\underline{v}_P) = \frac{d\underline{r}_P}{dt} \times m\underline{v}_P + \underline{r}_P \times \frac{d}{dt}(m\underline{v}_P) = \underline{r}_P \times \frac{d}{dt}(m\underline{v}_P). \quad (2.21)$$

Inserendo la (2.14) si ottiene l'uguaglianza

$$\frac{d}{dt}(\underline{r}_P \times m\underline{v}_P) = \underline{r}_P \times \underline{F}_P \quad (2.22)$$

che costituisce il Teorema del momento della quantità di moto per un punto materiale.

Nel caso di una porzione di fluido occupante il volume materiale $\mathcal{V}_m(t)$, questo teorema si traduce nella seguente formulazione lagrangiana del bilancio della quantità di moto rispetto al punto O ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \underline{r} \times \rho \underline{v} dV = \underline{M}_m(t) = \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{r} \times \underline{\sigma} dA + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \underline{r} \times \rho \underline{G} dV \quad (2.23)$$

dove \underline{r} rappresenta il vettore posizione rispetto al punto O scelto come origine del sistema di riferimento, e $\underline{M}_m(t)$ è la risultante dei momenti (rispetto allo stesso centro O) di tutte le forze agenti sul fluido.

2.6 Bilancio di energia

Sia e l'energia specifica per unità di massa del fluido. Allora l'energia di un elemento di fluido è data da $\rho e dV$ e la variazione nel tempo dell'energia della porzione di fluido contenuta in $\mathcal{V}_m(t)$ è pari alla potenza \dot{E}_m^{\leftarrow} netta (positiva se ricevuta) scambiata dal fluido con il suo ambiente

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho e dV = \dot{E}_m^{\leftarrow} \quad (2.24)$$

dove risulta $\dot{E}_m^{\leftarrow} = \dot{Q}_m^{\leftarrow} + \dot{W}_m^{\leftarrow}$ con \dot{Q}_m^{\leftarrow} , potenza termica, e \dot{W}_m^{\leftarrow} , potenza meccanica definiti come segue. Infatti uno scambio di energia può essere dovuto ad uno dei seguenti effetti:

- Scambi tra due elementi di fluido all'interno di $\mathcal{V}_m(t)$, che, sommati, si elidono a vicenda, in quanto se uno di essi riceve energia dall'altro, la loro energia complessiva non cambia. Fanno parte di questa categoria anche gli scambi di tipo diffusivo o convettivo, che comportano che fra gli elementi di fluido si scambino costituenti di uno o più tipi (atomi, molecole) modificandone sia la composizione, sia la massa, sia l'energia, sia l'entropia. Tuttavia, questi scambi sono interni al sistema e non comportano scambi con il suo ambiente, come succede invece se le stesse modalità avvengono fra un elemento

di fluido interno ed uno esterno alla superficie che delimita la porzione di fluido considerata. Nell'analisi lagrangiana, tuttavia, per definizione del volume materiale, la superficie non può essere attraversata da materia e pertanto l'unica modalità di scambio possibile attraverso tale superficie "impermeabile" è l'interazione di tipo calore (prossimo punto).

- Scambi per interazione di tipo calore fra elementi di fluido appartenenti alla superficie $A_m(t)$ di $\mathcal{V}_m(t)$ ed elementi di fluido esterni (o elementi di solido esterni, dove il fluido è in contatto con una parete solida). Sia \underline{q}'' il vettore che rappresenta il flusso termico specifico in un generico punto del fluido (potenza termica per unità di superficie scambiata dal fluido moltiplicata per il versore che indica la direzione del flusso termico). In un generico punto della superficie $\mathcal{A}_m(t)$ dove la normale uscente della superficie ha la direzione del versore \underline{n} , tale vettore ha due componenti, una diretta come la normale \underline{n} alla superficie e una giacente nel piano tangente alla stessa, quindi l'energia termica che compete ad un'area infinitesima è

$$\underline{q}'' dA = q_n'' dA \underline{n} + q_t'' dA \underline{t}, \quad (2.25)$$

dove \underline{t} è un versore nel piano tangente. Poichè l'energia termica scambiata è quella che esce o entra attraverso la superficie, la parte di \underline{q}'' responsabile di questo trasferimento è la componente lungo \underline{n} , mentre l'altra componente non esce dalla porzione di fluido in esame, ma si limita a scorrere sulla superficie. La potenza termica totale scambiata è pertanto

$$\dot{Q}_m^{\leftarrow} = - \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{n} \cdot \underline{q}'' dA, \quad (2.26)$$

dove il segno negativo dipende da due convenzioni: sul verso del vettore \underline{n} , scelto uscente dalla superficie cui si riferisce (in questo caso $\mathcal{A}_m(t)$), e della freccia sul simbolo \dot{Q}_m^{\leftarrow} che indica che l'energia è entrante se il valore è positivo.

- Scambio di potenza meccanica dovuta al lavoro sulla superficie di $\mathcal{V}_m(t)$, lavoro che ha origine dalla deformazione cui è soggetto $\mathcal{V}_m(t)$ per opera delle forze esterne $\underline{\sigma} dA$ agenti sugli elementi di fluido che si trovano su $\mathcal{A}_m(t)$ e in moto alla velocità \underline{v} :

$$\dot{W}_m^{\leftarrow} = \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{v} \cdot \underline{\sigma} dA \quad (2.27)$$

preso col segno positivo perchè se \underline{v} e $\underline{\sigma}$ sono concordi il lavoro è eseguito sull'elemento di fluido.

- Scambio di potenza meccanica dovuto al lavoro delle forze di volume $\rho \underline{G}$. Se il campo esterno che le genera è conservativo, cioè se \underline{G} ammette un potenziale ϕ indipendente dal tempo tale che $\underline{G} = -\underline{\nabla}\phi$, e quindi il lavoro di tale forza conservativa contribuisce alla potenza scambiata

$$\dot{W}_c^{\leftarrow} = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \underline{v} \cdot \rho \underline{G} dV = - \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\phi dV, \quad (2.28)$$

tuttavia questo effetto è già considerato nell'espressione dell'energia specifica e per gli stati di flusso di massa associati agli elementi di fluido (vedi equazione (2.31) qui di seguito; vedi anche la nota a pag. mettere riferimento10). Se invece \underline{G} non ammette potenziale, e se ϕ è invece il potenziale considerato nell'equazione (2.31)(ad esempio, $\phi = gz$ se si riferisce alla sola forza peso), allora occorre tener conto del lavoro della componente non conservativa $\underline{G} - (-\underline{\nabla}\phi)$ e dunque della potenza scambiata

$$\dot{W}_{nc}^{\leftarrow} = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \underline{v} \cdot (\underline{G} + \underline{\nabla}\phi) dV \quad . \quad (2.29)$$

Se sono contemporaneamente presenti tutti questi tipi di scambi energetici, l'equazione del bilancio di energia secondo la descrizione lagrangiana del moto assume la seguente forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho e dV = - \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{q}'' \cdot \underline{n} dA + \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{v} \cdot \underline{\sigma} dA. \quad (2.30)$$

Dato che per l'ipotesi del quasi-equilibrio locale le proprietà degli elementi di fluido sono assunte pari a quelle dello stato di flusso di massa associato, la loro energia specifica è data dalla somma dei tre termini

$$e = u(T, p, y_1, \dots, y_r) + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} + \phi, \quad (2.31)$$

dove u è l'energia interna specifica all'unità di massa, $\frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}$ l'energia cinetica specifica e ϕ l'energia potenziale specifica ($\phi = gz$ se c'è solo la forza peso), e T, p, y_1, \dots, y_r sono temperatura, pressione e composizione molare dello stato di flusso di massa associato.

2.7 Bilancio di entropia

Indicata con s l'entropia specifica per unità di massa, per ciascun elemento di fluido l'entropia è data da $\rho s dV$ e la variazione nel tempo dell'entropia della porzione di fluido contenuta in $\mathcal{V}_m(t)$ è pari all'entropia \dot{S}_m^{\leftarrow} netta (positiva se entrante) scambiata nell'unità di tempo dal fluido con il suo ambiente, cui si somma l'entropia generata all'interno del fluido per irreversibilità. Indicando con \dot{s}_{gen} l'entropia generata per unità di tempo e per unità di volume, l'espressione lagrangiana dell'equazione di bilancio dell'entropia è

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho s dV = \dot{S}_m^{\leftarrow} + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \dot{s}_{gen} dV. \quad (2.32)$$

Si osservi che, essendo $\dot{s}_{gen} \geq 0$, l'integrale a secondo membro che contiene questo termine è non negativo. Uno scambio di entropia può essere dovuto ad uno dei seguenti effetti:

relazione nota come *teorema del trasporto* o di *Reynolds*, da cui segue l'importante relazione

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \phi dV \Big|_{t_0}^{\mathcal{V}_m(t_0)=\mathcal{V}_c(t_0)} = \int_{\mathcal{V}_c(t_0)} \left[\frac{D\phi}{Dt} + \phi \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right] dV \quad (2.42)$$

spesso riscritta più sinteticamente nella forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \phi dV = \int_{\mathcal{V}_c} \left[\frac{D\phi}{Dt} + \phi \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right] dV \quad (2.43)$$

sottintendendo il fatto che \mathcal{V}_m e \mathcal{V}_c coincidono all'istante di tempo considerato t_0 . Nelle sezioni che seguono usiamo questo risultato per riscrivere le equazioni di bilancio in forma integrale in termini di un volume di controllo arbitrario, ottenendo tutti i vantaggi analitici della descrizione euleriana cui abbiamo già accennato. La relazione (2.43) consente di riscrivere le equazioni di bilancio viste in una forma che risulta utile (vedi capitolo 3) alle derivazioni delle loro formulazioni indefinite. Osserviamo innanzitutto che il bilancio di massa (2.12) prende la forma

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho dV = \int_{\mathcal{V}_c} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right] dV \quad (2.44)$$

Da questa e dalla (2.43), facendo uso della (1.26), seguono le importanti relazioni

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \phi dV = \int_{\mathcal{V}_c} \rho \frac{D\phi}{Dt} dV \quad (2.45)$$

dove ϕ è un campo scalare (ad esempio, energia specifica e o entropia specifica s) e

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \underline{\Psi} dV = \int_{\mathcal{V}_c} \rho \frac{D\underline{\Psi}}{Dt} dV \quad (2.46)$$

dove $\underline{\Psi}$ è un campo vettoriale (ad esempio, quantità di moto specifica \underline{v} o momento della quantità di moto specifica $\underline{r} \times \underline{v}$).

Ne segue che le equazioni di bilancio viste possono essere riscritte nella forma

$$\int_{\mathcal{V}_c} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right] dV = 0 \quad (2.47)$$

$$\int_{\mathcal{V}_c} \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} dV = \underline{F}_c \quad (2.48)$$

$$\int_{\mathcal{V}_c} \rho \frac{D\underline{r} \times \underline{v}}{Dt} dV = \underline{M}_c \quad (2.49)$$

$$\int_{\mathcal{V}_c} \rho \frac{De}{Dt} dV = \dot{Q}_c^{\leftarrow} + \dot{W}_c^{\leftarrow} \quad (2.50)$$

$$\int_{\mathcal{V}_c} \rho \frac{Ds}{Dt} dV = \dot{s}_c^{\leftarrow} + \int_{\mathcal{V}_c} \dot{s}_{gen} dV \quad (2.51)$$

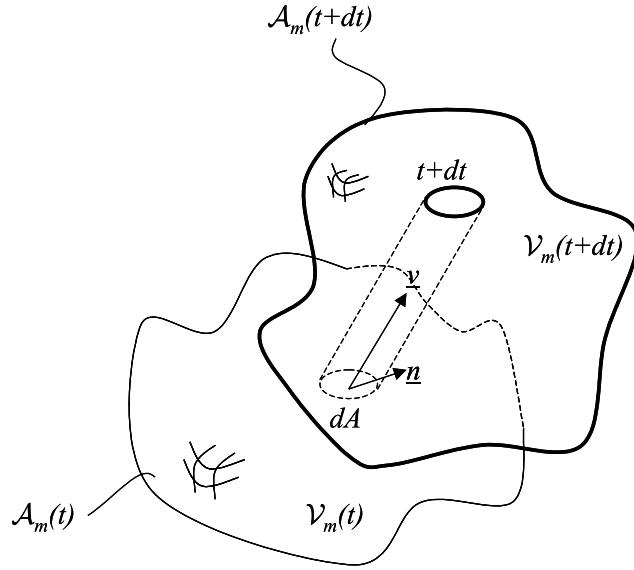


Figura 2.2: il volume materiale trasla, ruota e si deforma nel tempo seguendo il moto delle particelle di fluido che contiene.

2.9 Dimostrazione del teorema del trasporto

Nell'impostazione euleriana il concetto di volume di controllo sostituisce quello di volume materiale tipico della lagrangiana. Un volume di controllo è un sottoinsieme dello spazio \mathbb{R}^3 , indicato con il simbolo \mathcal{V}_c , eventualmente dotato di moto proprio, passibile di deformazione (distorsione e dilatazione). In definitiva, si tratta di un insieme i cui elementi (punti dello spazio) possono variare nel tempo, e per questo viene più precisamente indicato con $\mathcal{V}_c(t)$, esplicitandone così la dipendenza dal tempo.

La differenza fondamentale tra volume materiale e volume di controllo, sta nel fatto che il primo è legato al moto del fluido oggetto di studio, mentre il secondo ne è totalmente indipendente. Infatti un volume materiale è, ad ogni istante t , occupato dagli stessi elementi di fluido, invece il volume di controllo, in generale, è occupato in istanti diversi da elementi di fluido diversi. In breve, un volume materiale segue il moto del fluido in corrispondenza del quale è stato definito; un volume di controllo ha una propria identità intrinseca, quindi un moto proprio, ed è attraversato dal fluido a sua volta dotato di moto (i due moti in genere non coincidono).

In questa sezione procediamo ad una dimostrazione dettagliata della (2.41). Ad una prima lettura può essere utile saltare alla sezione successiva per cogliere subito l'utilità di tale relazione.

Come primo passo dimostriamo che in generale vale la relazione

$$\frac{d\Phi_m(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \phi(x, y, z, t) dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{A}_m(t)} \phi(\underline{v} \cdot \underline{n}) dA \quad (2.52)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho e dV + \int_{\mathcal{A}_c} \rho e (\underline{v} - \underline{v}_c) \cdot \underline{n} dA = - \int_{\mathcal{A}_c} (\underline{q}'' \cdot \underline{n}) dA + \int_{\mathcal{A}_c} \underline{v} \cdot \underline{\sigma} dA. \quad (2.85)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho s dV + \int_{\mathcal{A}_c} \rho s (\underline{v} - \underline{v}_c) \cdot \underline{n} dA = - \int_{\mathcal{A}_c} \frac{\underline{q}'' \cdot \underline{n}}{T} dA + \int_{\mathcal{V}_c} \dot{s}_{gen} dV. \quad (2.86)$$

2.11 Relazioni fra bilanci per un volume di controllo e bilanci per un sistema aperto secondo la termodinamica

Il teorema del trasporto, le ipotesi del continuo e del quasi-equilibrio locale, e la distinzione fra volume materiale e volume di controllo, consentono di interpretare le equazioni di bilancio ottenute come estensioni di quelle già viste nella termodinamica per un sistema aperto.¹⁰ Anche nella termodinamica infatti, si parte dalla definizione di sistema ristretta ad una collezione ben identificata di costituenti materiali che vengono seguiti nel tempo esattamente come abbiamo inteso nella definizione di volume materiale. Poi, una volta introdotta la nozione di stato di flusso di massa, la definizione di sistema può essere allargata ad una collezione di costituenti materiali, che non sono più sempre gli stessi, ma che sono definiti dal trovarsi all'interno di una regione di spazio ben identificata (un volume di controllo), che può essere racchiusa non solo da superfici chiuse a scambi di materia ma anche da superfici aperte attraverso le quali avvengono interazioni di tipo flusso di massa. Le uniche estensioni rispetto al sistema aperto della termodinamica sono:

1. che qui ogni punto della superficie di controllo è in generale interessato da diverse condizioni di interazione di tipo flusso di massa, in quanto lo stato di quasi-equilibrio (o meglio quasi-flusso-di-massa) delle particelle di fluido varia in modo continuo nello spazio;
2. che ai fini dell'interazione attraverso la superficie di controllo si assumono per gli elementi di fluido le proprietà dello stato di flusso di massa associato definito nella sezione 1.2.

Indicando con m_c , E_c e S_c rispettivamente la massa, l'energia e l'entropia del sistema aperto definito dal volume di controllo $\mathcal{V}_c(t)$, si ha

$$m_c(t) = \int_{\mathcal{V}_c(t)} \rho dV \quad (2.87)$$

$$E_c(t) = \int_{\mathcal{V}_c(t)} \rho e dV \quad (2.88)$$

$$S_c(t) = \int_{\mathcal{V}_c(t)} \rho s dV. \quad (2.89)$$

¹⁰ Si adottano la terminologia e le definizioni introdotte in G.P. Beretta, *Termodinamica*, Ed. Cartolibreria Snoopy, 2002.

- la risultante delle *forze di superficie* agenti su un tratto \mathcal{A}_{ci} della superficie di controllo con

$$\underline{\Pi}_i = \int_{\mathcal{A}_{ci}(t)} \underline{\sigma} dA. \quad (2.119)$$

In questo modo, l'equazione della quantità di moto (2.83) può essere riscritta nella forma usuale dell'idraulica

$$\underline{I}_c(t) = \sum_k \dot{\underline{M}}_k^{\leftarrow} - \sum_j \dot{\underline{M}}_j^{\rightarrow} + \underline{G}_c + \sum_i \underline{\Pi}_i \quad (2.120)$$

ovvero in quella equivalente

$$\frac{d\underline{M}_c}{dt} = \sum_k \dot{m}_k^{\leftarrow} \bar{v}_k \underline{\beta}_k - \sum_j \dot{m}_j^{\rightarrow} \bar{v}_j \underline{\beta}_j + \underline{G}_c + \sum_i \underline{\Pi}_i \quad (2.121)$$

detta anche *equazione globale dell'equilibrio dinamico*.

2.13 Memoradum (repetita iuvant)

- *Diffusione termica*: scambio di energia fra elementi di fluido adiacenti in stato di quasi-equilibrio locale con differenza di temperatura infinitesima, regolato dalla legge di Fourier

$$\underline{q}'' = -k \underline{\nabla} T \quad (2.122)$$

- *Diffusione di quantità di moto*: si realizza fra elementi di fluido adiacenti che hanno differenza di velocità infinitesima ed è regolata dalla legge di Navier

$$\underline{f}_x'' = -\mu \underline{\nabla} v_x \quad (2.123)$$

- *Diffusione di massa* (o di quantità di costituenti): si realizza fra elementi di fluido adiacenti che hanno diversa composizione, con differenze infiniteime fra le composizioni ed è regolata dalla legge di Fick

$$\underline{d}_i'' = -D_i \underline{\nabla} c_i \quad (2.124)$$

- Bilanci in forma lagrangiana su un volume materiale $\mathcal{V}_m(t)$:

$$\text{massa} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho dV = 0 \quad (2.125)$$

$$\text{quantità di moto} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \underline{v} dV = \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{\sigma} dA + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \underline{G} dV \quad (2.126)$$

$$\text{momento della quantità di moto} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \underline{r} \times \rho \underline{v} dV = \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{r} \times \underline{\sigma} dA + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \underline{r} \times \rho \underline{G} dV \quad (2.127)$$

$$\text{energia} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho e dV = - \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{q}'' \cdot \underline{n} dA + \int_{\mathcal{A}_m(t)} \underline{v} \cdot \underline{\sigma} dA \quad (2.128)$$

$$\text{entropia} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho s dV = - \int_{\mathcal{A}_m(t)} \frac{\underline{q}'' \cdot \underline{n}}{T} dA + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \dot{s}_{gen} dV \quad (2.129)$$

3. *Teorema del trasporto*: permette di tradurre in forma euleriana i precedenti bilanci scritti in forma lagrangiana, passando da un volume materiale \mathcal{V}_m ad un volume di controllo \mathcal{V}_c

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \phi dV + \int_{\mathcal{A}_c(t)} \phi(\underline{v} - \underline{v}_c) \cdot \underline{n} dA \quad (2.130)$$

dove ϕ è una funzione scalare o vettoriale nelle variabili $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

4. Bilanci in forma euleriana su un volume di controllo \mathcal{V}_c (sottintendiamo la dipendenza dal tempo t)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho dV + \int_{\mathcal{A}_c} \rho(\underline{v} - \underline{v}_c) \cdot \underline{n} dA = 0 \quad (2.131)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho \underline{v} dV + \int_{\mathcal{A}_c} \rho \underline{v} [\underline{v} \cdot \underline{n} - \underline{v}_c \cdot \underline{n}] dA = \underline{F}_c \quad (2.132)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho \underline{r} \times \underline{v} dV + \int_{\mathcal{A}_c} \rho \underline{r} \times \underline{v} [\underline{v} \cdot \underline{n} - \underline{v}_c \cdot \underline{n}] dA = \underline{M}_c \quad (2.133)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho e dV + \int_{\mathcal{A}_c} \rho e (\underline{v} - \underline{v}_c) \cdot \underline{n} dA = - \int_{\mathcal{A}_c} (\underline{q}'' \cdot \underline{n}) dA + \int_{\mathcal{A}_c} \underline{v} \cdot \underline{\sigma} dA \quad (2.134)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho s dV + \int_{\mathcal{A}_c} \rho s (\underline{v} - \underline{v}_c) \cdot \underline{n} dA = - \int_{\mathcal{A}_c} \frac{\underline{q}'' \cdot \underline{n}}{T} dA + \int_{\mathcal{V}_c} \dot{s}_{gen} dV. \quad (2.135)$$

5. Equazione globale dell'equilibrio dinamico

$$\frac{d\underline{M}_c}{dt} = \sum_k \dot{m}_k^- \bar{v}_k \underline{\beta}_k - \sum_j \dot{m}_j^+ \bar{v}_j \underline{\beta}_j + \underline{G}_c + \sum_i \underline{\Pi}_i. \quad (2.136)$$

Equazioni di bilancio in forma indefinita

Il teorema del trasporto permette di dedurre delle equazioni indefinite a partire dalle equazioni di bilancio in forma integrale viste nel capitolo precedente, (2.82), (2.83), (2.84), (2.85) e (2.86). Un'equazione indefinita è, per definizione, valida in ogni punto dello spazio ed in ogni istante di tempo. Da notare che le equazioni che si ottengono contengono funzioni nelle variabili $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, pertanto sono equazioni che valgono nell'ambito della descrizione euleriana.

3.1 Equazione di continuità

Per un volume di controllo \mathcal{V}_c arbitrario vale la relazione (2.47)

$$\int_{\mathcal{V}_c} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right] dV = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Poichè questo integrale è nullo qualsiasi sia il volume di controllo \mathcal{V}_c , la funzione integranda deve essere nulla in ogni punto di \mathbb{R}^3

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (3.2)$$

che costituisce l'*equazione di continuità* o *equazione indefinita di bilancio di massa*. Essa può essere riscritta nella forma equivalente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \rho + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad . \quad (3.4)$$

Il vettore $\rho \underline{v}$ rappresenta il flusso convettivo specifico di massa, in quanto in effetti lo scalare $\rho \underline{v} \cdot \underline{n}$ rappresenta la massa per unità di area che attraversa nell'unità di tempo una superficie di giacitura normale a \underline{n} .

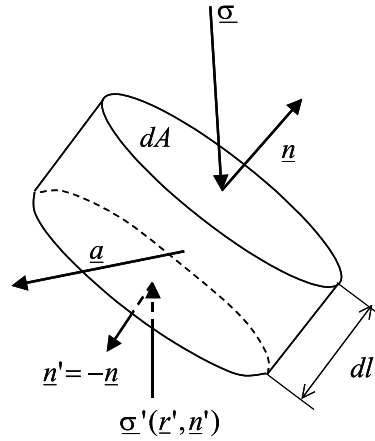


Figura 3.1: cilindro di altezza infinitesima.

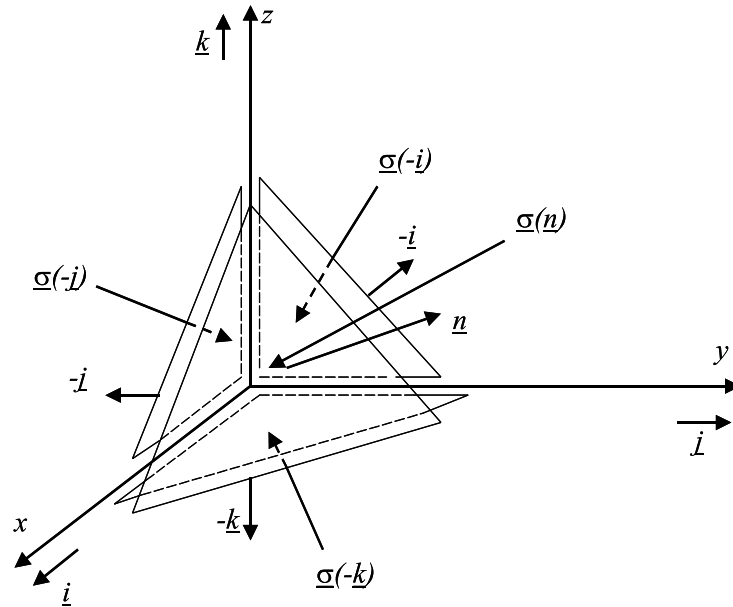


Figura 3.2: tetraedro di Cauchy.

dalla posizione P sulla quale vanno a coincidere i centri di tutte e quattro le facce del tetraedro “schiacciato”, otteniamo l’equazione

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{n}) dA_n + \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{i}) dA_x + \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{j}) dA_y + \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{k}) dA_z, \quad (3.19)$$

la quale può essere semplificata, tenendo presente la (3.17) e le uguaglianze del tipo $dA_x = dA_n(\underline{i} \cdot \underline{n})$, come segue:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{i})(\underline{i} \cdot \underline{n}) + \underline{\underline{\sigma}}(\underline{j})(\underline{j} \cdot \underline{n}) + \underline{\underline{\sigma}}(\underline{k})(\underline{k} \cdot \underline{n}). \quad (3.20)$$

Si definisce *tensore degli sforzi* il tensore doppio dato dalla seguente espressione:

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{i}) \otimes \underline{i} + \underline{\underline{\sigma}}(\underline{j}) \otimes \underline{j} + \underline{\underline{\sigma}}(\underline{k}) \otimes \underline{k}. \quad (3.21)$$

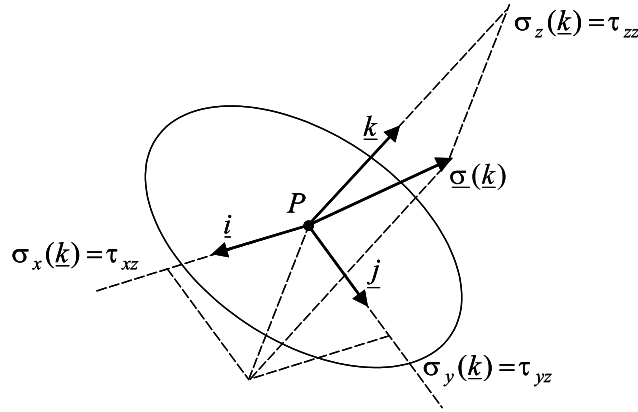


Figura 3.3: Definizione delle componenti dello sforzo nel punto P su una superficie con giacitura normale a \underline{k} .

In questo modo si ottiene anche⁴

$$\underline{\sigma}(\underline{n}) = \underline{\tau} \cdot \underline{n}, \quad (3.23)$$

che non è altro che la (3.16), in cui si sottintende la dipendenza dal vettore \underline{r} che indica la posizione del punto P , perché fissato nel contesto.

Usando la notazione $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ anziché $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ per indicare i tre versori della terna cartesiana scelta, le relazioni (3.20) e (3.21) possono essere riscritte nella forma:

$$\underline{\sigma}(\underline{n}) = \underline{\sigma}(\underline{e}_j) (\underline{e}_j \cdot \underline{n}) \quad (3.24)$$

$$\underline{\tau} = \underline{\sigma}(\underline{e}_j) \otimes \underline{e}_j \quad (3.25)$$

dove al solito è sottintesa la sommatoria sull'indice ripetuto. Inoltre, considerando che il vettore $\underline{\sigma}(\underline{e}_j)$ può essere espresso (vedi Figura (3.3)) in termini delle sue componenti $\sigma_i(\underline{e}_j)$

$$\underline{\sigma}(\underline{e}_j) = \sigma_i(\underline{e}_j) \underline{e}_i \quad (3.26)$$

possiamo anche scrivere:

$$\underline{\tau} = \sigma_i(\underline{e}_j) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (3.27)$$

così che vediamo che la matrice che rappresenta il tensore $\underline{\tau}$ rispetto alla data terna cartesiana è:

$$\tau_{ij} = \sigma_i(\underline{e}_j) = \underline{e}_i \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{e}_j \quad (3.28)$$

⁴ In alcuni testi il tensore degli sforzi è definito con diversa convenzione mediante la relazione

$$\underline{\tau} = \underline{e}_i \otimes \underline{\sigma}(\underline{e}_i) \quad (3.22)$$

anziché la (3.21) qui adottata, $\underline{\tau} = \underline{\sigma}(\underline{e}_i) \otimes \underline{e}_i$. Ne risulta il tensore trasposto di quello qui definito. In altri testi ancora si definisce $\underline{\tau} = -\underline{e}_i \otimes \underline{\sigma}(\underline{e}_i)$ per mantenere l'analoga struttura delle relazioni che legano flussi e gradienti, infatti in questo modo $\tau_{xn} = f''_{xn}$ (vedi eq. (2.8)).

dove τ_x, τ_y, τ_z sono i valori principali di $\underline{\underline{\tau}}$ (vedi pag. 15).

Lo sforzo su una superficie con giacitura normale a \underline{n} è dato da

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(\underline{n}) &= \sigma_x(\underline{n}) \underline{i} + \sigma_y(\underline{n}) \underline{j} + \sigma_z(\underline{n}) \underline{k} = \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} = \\ &= \tau_x \underline{i} (\underline{i} \cdot \underline{n}) + \tau_y \underline{j} (\underline{j} \cdot \underline{n}) + \tau_z \underline{k} (\underline{k} \cdot \underline{n})\end{aligned}\quad (3.37)$$

ed ha quindi componenti $\sigma_x(\underline{n}) = \tau_x (\underline{i} \cdot \underline{n})$, $\sigma_y(\underline{n}) = \tau_y (\underline{j} \cdot \underline{n})$, $\sigma_z(\underline{n}) = \tau_z (\underline{k} \cdot \underline{n})$. Al variare del versore \underline{n} , il vettore $\underline{\sigma}(\underline{n})$ centrato nel punto P spazza la superficie del cosiddetto *ellissoide degli sforzi* di cui τ_x, τ_y, τ_z rappresentano le lunghezze dei semiassi e la cui equazione è facilmente ricavabile dalla ben nota relazione fra i coseni direttori di \underline{n} , $(\underline{i} \cdot \underline{n})^2 + (\underline{j} \cdot \underline{n})^2 + (\underline{k} \cdot \underline{n})^2 = 1$, da cui risulta

$$\frac{\sigma_x^2(\underline{n})}{\tau_x^2} + \frac{\sigma_y^2(\underline{n})}{\tau_y^2} + \frac{\sigma_z^2(\underline{n})}{\tau_z^2} = 1 \quad (3.38)$$

che coincide appunto con l'equazione di un ellissoide centrato nel punto P rispetto alla terna cartesiana principale

$$\frac{x^2}{\tau_x^2} + \frac{y^2}{\tau_y^2} + \frac{z^2}{\tau_z^2} = 1 \quad . \quad (3.39)$$

E' facile concludere che il massimo (minimo) sforzo nel punto P è pari al maggiore (minore) dei tre sforzi principali ed è riscontrato sulla superficie con la corrispondente direzione principale. E' anche facile concludere che, a meno che l'ellissoide sia una sfera ($\tau_x = \tau_y = \tau_z$, quindi $\underline{\underline{\tau}}$ isotropo), lo sforzo rispetto a qualsiasi superficie con giacitura normale \underline{n} non principale ha una componente di taglio non-nulla, ossia

$$\underline{\sigma}(\underline{n}) - [\underline{n} \cdot \underline{\sigma}(\underline{n})] \underline{n} \neq 0 \quad . \quad (3.40)$$

Da questa osservazione e dalla definizione di fluido (che in quiete non può sostenere sforzi di taglio) segue che per un fluido in quiete il tensore degli sforzi deve essere isotropo (risultato noto come *principio o legge di Pascal*).

Il tensore degli sforzi è una campo tensoriale del secondo ordine, nelle variabili (x, y, z) . Come tale, ad esso si possono applicare gli operatori differenziali noti, tra cui l'operatore divergenza, la cui definizione è data dall'espressione (1.84).

3.3 Equazione indefinita del moto

Si vuole ora determinare l'equazione indefinita del moto, vale a dire un'equazione differenziale valida in ogni punto dello spazio in cui avviene il flusso e che abbia come incognite il campo di velocità \underline{v} del fluido ed altre, quali le componenti del tensore degli sforzi.

Per un volume di controllo \mathcal{V}_c arbitrario vale la relazione (2.48)

$$\int_{\mathcal{V}_c(t)} \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} dV = \int_{\mathcal{A}_c(t)} \underline{\sigma} dA + \int_{\mathcal{V}_c(t)} \rho \underline{G} dV \quad . \quad (3.41)$$

Proiettando entrambi i membri della (3.41) sul versore \underline{e}_i di una terna cartesiana arbitrariamente scelta, si arriva all'espressione

$$\int_{\mathcal{V}_c} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_{\mathcal{A}_c} \sigma_i dA + \int_{\mathcal{V}_c} \rho G_i dV \quad . \quad (3.42)$$

Per ottenere l'equazione cercata, si deve trasformare l'integrale di superficie in uno di volume su \mathcal{V}_c , per poi sfruttare l'additività dell'operatore integrale e l'arbitrarietà del volume di controllo \mathcal{V}_c . Per la (3.23), si può scrivere $\underline{\sigma} = \underline{\tau} \cdot \underline{n}$, che, passando alle componenti, diventa $\sigma_i = \tau_{ij} n_j$; ne segue che

$$\int_{\mathcal{A}_c} \sigma_i dA = \int_{\mathcal{A}_c} \tau_{ij} n_j dA = \int_{\mathcal{V}_c} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_{\mathcal{V}_c} (\underline{\nabla}_2 \cdot \underline{\tau})_i dV \quad . \quad (3.43)$$

Analogamente si può procedere per le altre componenti rispetto agli assi cartesiani y e z ; pertanto, scrivendo in notazione vettoriale, si ha

$$\int_{\mathcal{V}_c} \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} dV = \int_{\mathcal{V}_c} [(\underline{\nabla}_2 \cdot \underline{\tau}) + \rho \underline{G}] dV \quad , \quad (3.44)$$

dove il simbolo $\underline{\nabla}_2 \cdot \underline{\tau}$ è la divergenza di $\underline{\tau}$ fatta rispetto al secondo indice (come definita dalla (1.84))⁶.

Poiché il volume di controllo \mathcal{V}_c è arbitrario, dalla (3.44) si ottiene finalmente l'*equazione indefinita del moto* (o di bilancio della quantità di moto):

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \underline{\nabla}_2 \cdot \underline{\tau} + \rho \underline{G} \quad . \quad (3.45)$$

E' utile osservare che, grazie all'equazione di continuità, vale la seguente identità che dimostriamo qui di seguito alla fine della sezione

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v\underline{v}}) \quad . \quad (3.46)$$

dove $\underline{v\underline{v}}$ indica il tensore doppio associato nel seguente modo al campo di velocità \underline{v} ,

$$\underline{v\underline{v}} = \underline{v} \otimes \underline{v} = v_i v_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (3.47)$$

che significa

$$\underline{v\underline{v}} = v_x v_x \underline{i} \otimes \underline{i} + v_x v_y \underline{i} \otimes \underline{j} + \dots + v_z v_z \underline{k} \otimes \underline{k} \quad . \quad (3.48)$$

Il tensore $\underline{v\underline{v}}$ viene usualmente indicato anche con il simbolo $\underline{v\underline{v}}$ anzichè $\underline{v} \otimes \underline{v}$. Poiché è simmetrico, per quanto osservato a pag. 19 le sue due divergenze coincidono e quindi si scrive semplicemente $\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v\underline{v}})$. Viene cioè omesso o sottinteso il simbolo \otimes di prodotto tensoriale o esterno. Il tensore $\rho \underline{v\underline{v}}$ rappresenta il flusso convettivo specifico di quantità di moto, in quanto in effetti il vettore $\rho \underline{v\underline{v}} \cdot \underline{n}$ rappresenta la quantità di moto per unità di area che attraversa nell'unità di tempo una superficie di giacitura normale a \underline{n} per effetto del campo di moto del fluido

⁶ Dimostriamo più avanti che per un fluido newtoniano il tensore degli sforzi $\underline{\tau}$ è simmetrico, quindi le sue due divergenze coincidono.

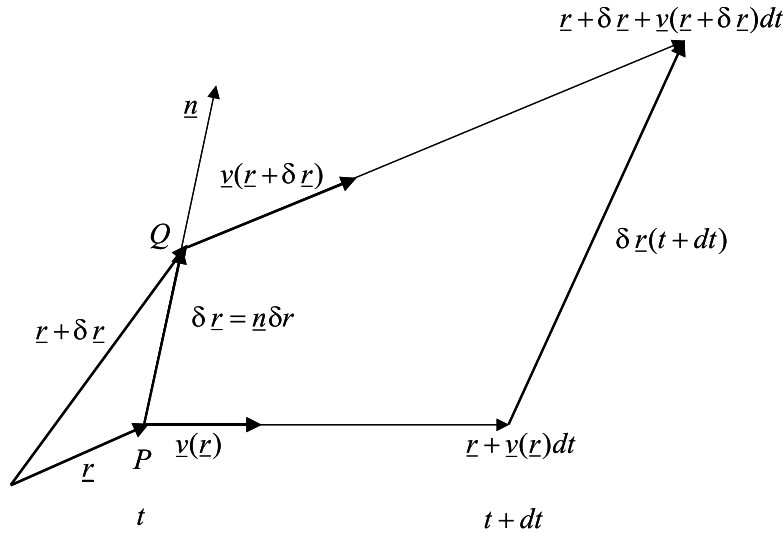


Figura 3.4: rapidità di deformazione di una fibra di continuo compresa fra le particelle P e Q .

del problema del moto di un fluido newtoniano senza la necessità di ricorrere all'equazione dell'energia: il problema dinamico è indipendente da quello termico, viceversa invece il problema termico dipende sempre dalla soluzione del problema dinamico, salvo nel caso di fluido in quiete.

3.5 Tensore della rapidità delle deformazioni

Per una definizione della rapidità delle deformazioni, occorre studiare come si deforma la configurazione delle particelle di fluido ovvero la loro posizione relativa durante il moto. Per prima cosa, con riferimento alla Figura (3.4) consideriamo una coppia di particelle P e Q individuata come segue. Il punto P si trova all'istante t nella posizione con coordinate \underline{r} , il punto Q giace a distanza δr da P nella direzione individuata dal versore \underline{n} originante nel punto P . Il moto delle due particelle è scomponibile in tre componenti:

- traslazione rigida: essa non genera deformazioni degli elementi di fluido; se è presente solo questa componente il segmento $\delta \underline{r}(t)$ trasla nella direzione di $\underline{v}(\underline{r})$ senza né allungarsi né ruotare e la particella Q trasla con la stessa velocità dalla particella P ; in generale, si elimina questa componente considerando il moto relativo di Q rispetto a P , ovvero sottraendo alla velocità di Q quella di P

$$\underline{v}(\underline{r} + \underline{n}\delta r) - \underline{v}(\underline{r}) \quad ; \quad (3.56)$$

- rotazione rigida: neppure questa componente genera deformazioni degli elementi di fluido; se è presente solo questa componente il segmento $\delta \underline{r}(t)$ ruota

rigidamente senza allungarsi e se il vettore $\underline{\Omega}$ rappresenta la velocità angolare di rotazione rigida intorno al punto P , la velocità della particella Q è data da:

$$\underline{\Omega} \times \underline{n}\delta r \quad ; \quad (3.57)$$

- deformazione: è costituita da due tipi di modificazione che l'elemento di fluido può subire: la dilatazione, intesa come variazione di forma che comporta una variazione di volume, e la distorsione, intesa come variazione di angoli fra direzioni di allineamento delle particelle dell'elemento di fluido che non comporti variazione di volume (se si pone l'elemento di fluido in due dimensioni, lo si può raffigurare come un rettangolo di lati dx e dy : la distorsione è data dal mutare dell'angolo formato dai lati). Per l'elemento filiforme di fluido che collega i punti Q e P , di lunghezza infinitesima δr e orientato secondo il versore \underline{n} , definiamo il vettore rapidità di deformazione mediante la seguente relazione

$$\underline{\dot{\xi}}(\underline{n}) = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\delta r} \left[\frac{d\delta \underline{r}}{dt} - \underline{\Omega} \times \delta \underline{r} \right] = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\delta r} \left[\frac{\delta \underline{r}(t+dt) - \delta \underline{r}(t)}{dt} - \underline{\Omega} \times \underline{n}\delta r \right] \quad (3.58)$$

la quale mette in evidenza il fatto che il vettore $\underline{\dot{\xi}}(\underline{n})$ è funzione sia della posizione \underline{r} sia della direzione \underline{n} che individua la direzione e il verso della deformazione della fibra di fluido e la rapidità di allungamento (o accorciamento) percentuale rispetto alla lunghezza iniziale. Vediamo ora come sia possibile riscrivere $\underline{\dot{\xi}}(\underline{n})$ in forma di prodotto scalare tra il vettore \underline{n} e un opportuno tensore doppio. Dalla Figura (3.4) si ricava la relazione

$$\delta \underline{r}(t+dt) - \delta \underline{r}(t) = \underline{v}(\underline{r} + \underline{n}\delta r)dt - \underline{v}(\underline{r})dt \quad (3.59)$$

e, sviluppando $\underline{v}(\underline{r} + \underline{n}\delta r)$ in serie di Taylor nell'intorno di \underline{r} , si può scrivere

$$\underline{v}(\underline{r} + \underline{n}\delta r) = \underline{v}(\underline{r}) + \underline{\nabla v}^\dagger \cdot \underline{n}\delta r \quad (3.60)$$

dove

$$\underline{\nabla v}^\dagger = v_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (3.61)$$

è il tensore Jacobiano associato al campo di velocità (vedi pag. 17), che è pari al trasposto del tensore $\underline{\nabla v}$ detto *gradiente di velocità*, e che secondo la (1.76) è rappresentato rispetto alla terna cartesiana $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ dalla matrice

$$[\underline{\nabla v}^\dagger] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

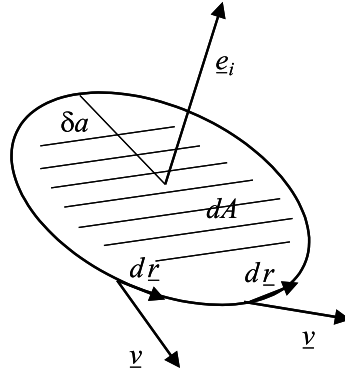


Figura 3.5: areola di raggio infinitesimo δa .

dove per il campo di velocità $\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}$ usiamo la notazione $\underline{v} = u \underline{i} + v \underline{j} + w \underline{k}$. Pertanto la (3.58) può essere riscritta come segue

$$\underline{\dot{\xi}}(\underline{n}) = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\delta r} \left[\frac{\underline{v}(\underline{r} + \delta \underline{r}) - \underline{v}(\underline{r})}{\delta r} - \underline{\Omega} \times \underline{n} \delta r \right] = \underline{\nabla v}^\dagger \cdot \underline{n} - \underline{\Omega} \times \underline{n} \quad . \quad (3.63)$$

Inoltre, possiamo utilizzare la seguente identità⁹

$$\underline{\Omega} \times \underline{n} = \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{n} \quad (3.66)$$

dove il tensore $\underline{\underline{\Omega}}$ è definito da

$$\underline{\underline{\Omega}} = -\epsilon_{ijk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \Omega_k \quad (3.67)$$

e rappresentato, rispetto alla terna $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$, dalla matrice

$$[\underline{\underline{\Omega}}] = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.68)$$

Pertanto, il vettore rapidità di deformazione $\underline{\dot{\xi}}(\underline{n})$ può essere riscritto nella forma¹⁰

$$\underline{\dot{\xi}}(\underline{n}) = (\underline{\nabla v}^\dagger - \underline{\underline{\Omega}}) \cdot \underline{n} = \underline{\dot{\underline{\xi}}} \cdot \underline{n} \quad (3.70)$$

⁹ Usando la notazione introdotta nella Sezione 1.5 è facile verificare le relazioni

$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{n} = -\epsilon_{ijk} \underline{e}_i n_j \Omega_k \quad (3.64)$$

$$\underline{\Omega} \times \underline{n} = \epsilon_{ijk} \underline{e}_i \Omega_j n_k \quad (3.65)$$

da cui, utilizzando la relazione $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$ segue l'identità.

¹⁰ E' facile dimostrare anche la relazione

$$\underline{\omega} \times \underline{n} = \underline{e}_i (v_{i,k} - v_{k,i}) n_k \quad . \quad (3.69)$$

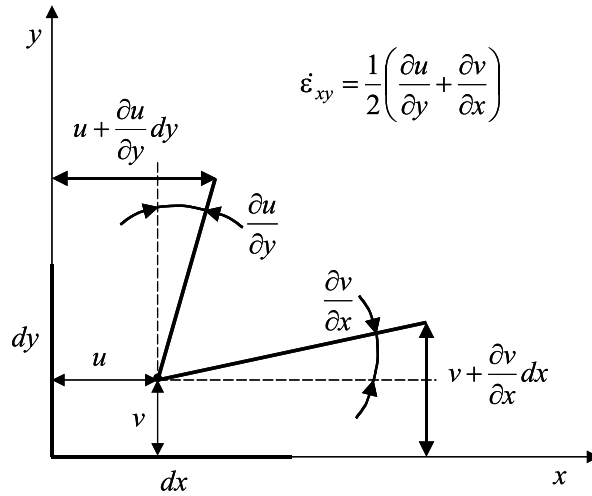


Figura 3.6:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla v}}^\dagger + \underline{\underline{\nabla v}}) \quad (3.79)$$

$$[\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \cdots \\ \cdots & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \cdots \\ \cdots & \cdots & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} . \quad (3.80)$$

Si nota che $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ è un tensore simmetrico la cui traccia è pari alla divergenza del campo di velocità

$$\text{Tr}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}) = \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}} = \dot{\epsilon}_{kk} = v_{k,k} \quad (3.81)$$

a conferma dell'interpretazione già data di $\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}$ come rapidità di dilatazione degli elementi di fluido (vedi pag. 54). In effetti, gli elementi sulla diagonale di $[\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}]$ rappresentano le rapidità di elongazione di fibre allineate con le direzioni della terna cartesiana e quelli fuori dalla diagonale il doppio delle rapidità di distorsione angolare sui piani individuati dalle coppie di versori della terna cartesiana cui si riferiscono (Figura (3.6)). Come ogni tensore, $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ può essere scomposto in una parte isotropa e una deviatorica (a traccia nulla), ossia, ricordando che $\text{Tr}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}) = \dot{\epsilon}_{kk} = \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}$,

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \frac{1}{3} (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}' \quad (3.82)$$

dove la prima rappresenta una velocità di dilatazione delle fibre di fluido uguale in tutte le direzioni e la seconda la velocità delle deformazioni che non comportano cambiamento di volume. Risulta $\dot{\epsilon}'_{kk} = 0$, la componente dilatatoria delle deformazioni è nulla e c'è solo la componente di distorsione, mentre $\dot{\epsilon}_{kk} = 0$ solo se $\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}} = 0$, vale a dire solo se il flusso è incomprimibile.

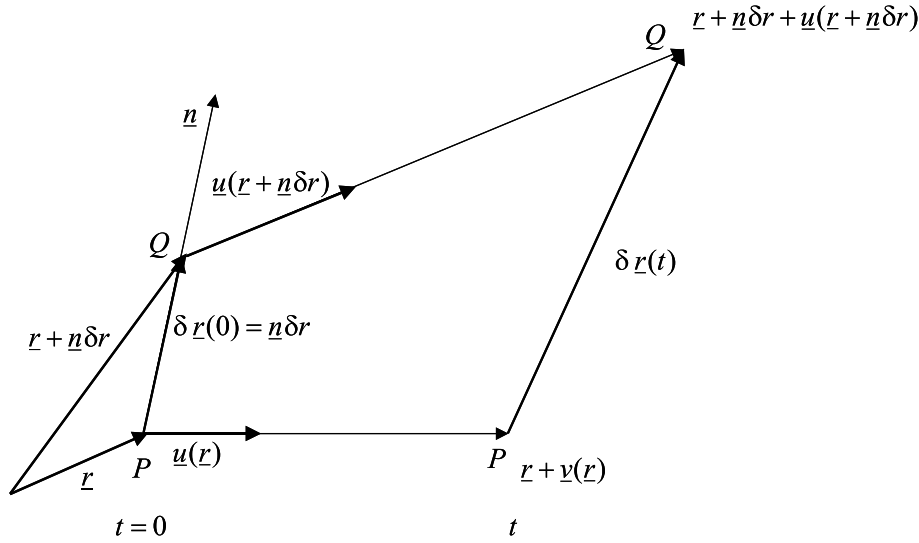


Figura 3.7: deformazione di una fibra di continuo compresa fra le particelle Q e P rispetto alla configurazione indisturbata a $t = 0$.

Si definisce il tensore delle deformazioni

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^\dagger + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}) \quad (3.91)$$

che fornisce per ogni direzione \underline{n} il vettore $\underline{\xi}$

$$\underline{\xi}(\underline{n}) = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n} \quad (3.92)$$

che rappresenta direzione, verso ed entità della deformazione della fibra di continuo di lunghezza infinitesima δr e allineata prima della deformazione con il versore \underline{n} , definita, con riferimento alla Figura (3.7), dalla relazione (analoga alla (3.58))

$$\underline{\xi}(\underline{n}) = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\delta r} \left[\underline{u}(\underline{r} + \underline{n} \delta r) - \underline{u}(\underline{r}) - \frac{1}{2} \underline{\vartheta} \times \underline{n} \delta r \right] = \quad (3.93)$$

$$= \frac{\delta \underline{r}(t) - \delta \underline{r}(0)}{\delta r} - \frac{1}{2} \underline{\vartheta} \times \underline{n} = \frac{\delta \underline{r}}{\delta r} - \underline{n} - \frac{1}{2} \underline{\vartheta} \times \underline{n} \quad (3.94)$$

dove $\underline{\vartheta} = \underline{\underline{\nabla}} \times \underline{u}$ è pari al doppio della rotazione rigida media del continuo nell'intorno del punto P (il cui contributo viene sottratto in quanto non determina deformazioni). Scegliendo la terna cartesiana $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ coincidente con le direzioni principali del tensore delle deformazioni nel punto P , risulta

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_x \underline{i} \otimes \underline{i} + \varepsilon_y \underline{j} \otimes \underline{j} + \varepsilon_z \underline{k} \otimes \underline{k} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \underline{i} \otimes \underline{i} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \underline{j} \otimes \underline{j} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underline{k} \otimes \underline{k} \quad (3.95)$$

dove $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sono i valori principali di $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (vedi pag. 1.5.2).

Analogamente a quanto visto per il tensore degli sforzi, al variare del versore \underline{n} , il vettore $\underline{\xi}(\underline{n})$ centrato nel punto P spazza l'*ellissoide delle deformazioni*, nel senso che vale la relazione

$$\frac{\xi_x^2(\underline{n})}{\varepsilon_x^2} + \frac{\xi_y^2(\underline{n})}{\varepsilon_y^2} + \frac{\xi_z^2(\underline{n})}{\varepsilon_z^2} = 1 \quad (3.96)$$

da cui si deduce ad esempio che la fibra più (meno) allungata è quella con direzione coincidente con la direzione principale di $\underline{\underline{\varepsilon}}$ corrispondente al massimo (minimo) dei tre valori principali.

E' interessante anche osservare che una superficie nel continuo che nella configurazione indisturbata è sferica, di raggio infinitesimo δr centrata nel punto P

$$\frac{x^2}{\delta r^2} + \frac{y^2}{\delta r^2} + \frac{z^2}{\delta r^2} = 1 \quad (3.97)$$

(dove con x, y, z indichiamo $x_Q(0) - x_P(0)$, $y_Q(0) - y_P(0)$, $z_Q(0) - z_P(0)$), dopo la deformazione diviene un ellissoide centrato nella nuova posizione di P , con espressione

$$\frac{x'^2}{\delta r^2(1 + \varepsilon_x)^2} + \frac{y'^2}{\delta r^2(1 + \varepsilon_y)^2} + \frac{z'^2}{\delta r^2(1 + \varepsilon_z)^2} = 1 \quad (3.98)$$

dove x', y', z' sono le coordinate

$$x' = x_Q(t) - x_P(t) - \frac{1}{2}\underline{\vartheta} \times [x_Q(0) - x_P(0)] \quad \text{etc.}, \quad (3.99)$$

rispetto alla terna cartesiana centrata nel punto P dopo la deformazione, ottenuta per rotazione angolare $-\underline{\vartheta}$ dalla terna principale $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ individuata dal tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}$ nel punto P prima della deformazione¹³.

3.7 L'equazione costitutiva. Fluidi newtoniani

Per deformare un corpo occorre esercitare degli sforzi distribuiti sulla sua superficie. Se tali sforzi dipendono unicamente dal valore delle deformazioni complessivamente ottenute, si dice che il corpo manifesta un comportamento *elastico* se il legame sforzi-deformazioni è lineare o *plastico* altrimenti. Se, invece, gli sforzi dipendono solo dalla rapidità con la quale si realizzano le deformazioni, si dice che il materiale si comporta come un *fluido*. Esistono anche comportamenti intermedi, in cui gli sforzi dipendono sia dalle deformazioni impresse sia dalla rapidità con cui esse vengono ottenute, che sono detti comportamenti da materiale *viscoelastico*. Il

¹³ Si ha infatti $x' = \underline{i} \cdot (\delta \underline{r} - \frac{1}{2}\underline{\vartheta} \times \underline{n}\delta r) = \underline{i} \cdot (\underline{n}\delta r + \underline{\xi}(\underline{n})\delta r) = (1 + \varepsilon_x)(\underline{i} \cdot \underline{n})\delta r$ e analogamente $y' = (1 + \varepsilon_y)(\underline{j} \cdot \underline{n})\delta r$ e $z' = (1 + \varepsilon_z)(\underline{k} \cdot \underline{n})\delta r$ da cui, applicando l'identità $(\underline{i} \cdot \underline{n})^2 + (\underline{j} \cdot \underline{n})^2 + (\underline{k} \cdot \underline{n})^2 = 1$ si ottiene la (3.98): la sfera di raggio δr si deforma in un ellissoide di semiassi $(1 + \varepsilon_x)\delta r$, $(1 + \varepsilon_y)\delta r$, $(1 + \varepsilon_z)\delta r$ ruotata di $\underline{\vartheta}$ e traslato di \underline{u} rispetto alla terna principale definita da $\underline{\underline{\varepsilon}}$ nella posizione indisturbata del centro P della sfera.

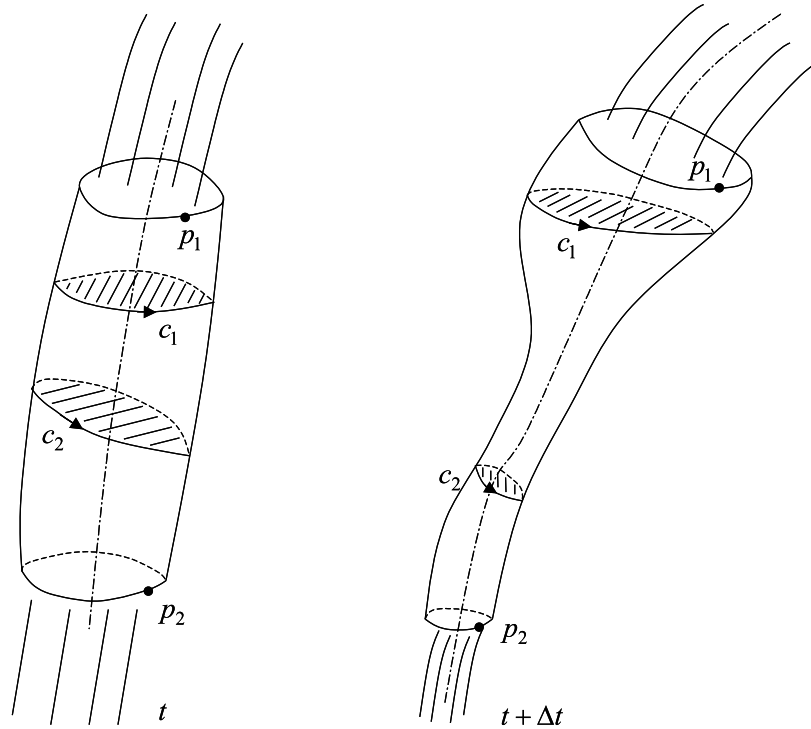


Figura 3.11: un tubo di vorticità (in assenza di viscosità) si muove e si deforma seguendo il moto delle particelle che lo costituiscono. Le linee di vorticità inizialmente racchiuse nel tubo vi restano racchiuse durante il moto, dividendosi dove il tubo si dilata e concentrandosi dove il tubo si contrae.

di vorticità ortogonale al suo asse, a seconda che la sezione del tubo sia localmente contratta o dilatata.

3.12 Equazione indefinita dell'entropia

Per un volume di controllo \mathcal{V}_c arbitrario vale la relazione (2.51) che, con le (2.33), diviene

$$\int_{\mathcal{V}_c(t)} \rho \frac{Ds}{Dt} dV = - \int_{\mathcal{A}_m(t)} \frac{\underline{q}'' \cdot \underline{n}}{T} dA + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \dot{s}_{gen} dV. \quad (3.177)$$

Utilizzando il teorema di Gauss-Green (1.112), l'integrale di superficie diventa integrale di volume, e l'equazione assume la forma

$$\int_{\mathcal{V}_c} \left[\rho \frac{Ds}{Dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\underline{q}''}{T} \right) - \dot{s}_{gen} \right] dV = 0. \quad (3.178)$$

3.13 Equazione indefinita dell'energia

Per un volume di controllo \mathcal{V}_c arbitrario vale la relazione (2.50) che, con le (2.26) e (2.27), si può scrivere nella forma

$$\int_{\mathcal{V}_c(t)} \rho \frac{De}{Dt} dV = - \int_{\mathcal{A}_c(t)} \underline{q}'' \cdot \underline{n} dA + \int_{\mathcal{A}_c(t)} \underline{v} \cdot \underline{\sigma} dA, \quad (3.187)$$

da cui si può partire per ottenere l'equazione indefinita dell'energia.

Ponendo $\underline{\sigma} = \underline{\tau} \cdot \underline{n}$ e utilizzando il teorema di Gauss-Green (1.112), gli integrali di superficie diventano integrali di volume, e l'equazione assume la forma

$$\int_{\mathcal{V}_c} \left[\rho \frac{De}{Dt} + \underline{\nabla} \cdot \underline{q}'' - \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{\tau}) \right] dV = 0. \quad (3.188)$$

Per l'arbitrarietà di \mathcal{V}_c , la funzione integranda è identicamente nulla

$$\rho \frac{De}{Dt} + \underline{\nabla} \cdot \underline{q}'' - \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{\tau}) = 0. \quad (3.189)$$

Si noti che, analogamente a quanto visto a pag. 61 sui tensori $\rho \underline{v} \underline{v}$ e $\underline{\tau}$, qui i vettori $\rho \underline{v}$, \underline{q}'' e $\underline{v} \cdot \underline{\tau}$ rappresentano rispettivamente il flusso convettivo specifico di energia, il flusso termico specifico per interazioni di tipo calore e il flusso specifico di energia per interazioni di tipo lavoro, in quanto in effetti gli scalari $\rho \underline{v} \cdot \underline{n}$, $\underline{q}'' \cdot \underline{n}$ e $\underline{v} \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} = \underline{v} \cdot \underline{\sigma}$ rappresentano l'energia per unità di area che attraversa nell'unità di tempo una superficie di giacitura normale a \underline{n} per effetto rispettivamente dello spostamento delle particelle di fluido dovuto al loro campo di moto, dell'effetto netto delle interazioni di tipo calore fra particelle di fluido adiacenti e del lavoro netto associato allo spostamento delle particelle contro lo sforzo che le particelle adiacenti oppongono al moto. E' utile osservare che grazie all'equazione di continuità vale la seguente identità

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} e); \quad (3.190)$$

infatti, in base alla (1.104), si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} e) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} e + \rho \frac{\partial e}{\partial t} + (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) \rho e + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}(\rho e) \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \rho \right) e + \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} e \right) \\ &= \rho \frac{De}{Dt}, \end{aligned} \quad (3.191)$$

avendo semplificato in base all'equazione di continuità (3.2). Pertanto la (3.189) diviene

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q}'' + \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{\tau}), \quad (3.192)$$

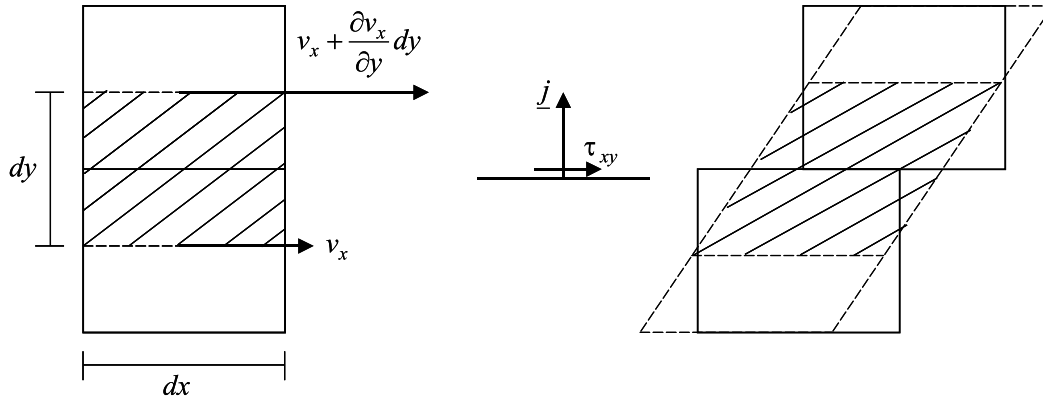


Figura 3.12:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p_m \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}', \quad (3.207)$$

così che risulta²⁶

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[\frac{1}{3} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\xi}}' + \underline{\underline{\Omega}} \right] : \left[-p_m \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}' + p \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right] \\ &= \frac{1}{3} (p - p_m) \underline{\nabla} \cdot \underline{v} + \underline{\underline{\xi}}' : \underline{\underline{\tau}}' \end{aligned} \quad (3.208)$$

Ad esempio, per il fluido newtoniano, $p - p_m = \lambda \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$ e $\underline{\underline{\tau}}' = 2\mu \underline{\underline{\xi}}'$ e quindi risulta

$$\Phi = \frac{\lambda}{3} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v})^2 + 2\mu \underline{\underline{\xi}}' : \underline{\underline{\xi}}' \quad (3.209)$$

da cui si vede che, come deve essere, Φ è sempre positiva (o nulla, come ad esempio se il fluido è in quiete o in moto di traslazione o rotazione rigida).

In alcuni casi di interesse applicativo la funzione Φ assume forme particolarmente semplici:

- se il flusso è incomprimibile a geometria piana e monodimensionale (flusso tra due lastre piane), il moto è bidimensionale $v_y = 0$, $v_x = v_x(y)$ e si ha

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2, \quad (3.210)$$

dove x e y sono le direzioni che caratterizzano il flusso.

La Figura (3.12) illustra schematicamente l'origine della dissipazione. Due elementi di fluido adiacenti separati da una superficie con normale \underline{j} hanno velocità diverse v_x e $v_x + v_{x,y}dy$. La forza di attrito dovuta alle diverse velocità è data da $\tau_{xy} dx dy$, poichè lo strisciamento fra i due elementi avviene alla velocità relativa $v_{x,y}dy$ ne risulta una potenza meccanica dissipata per attrito pari a $\tau_{xy} v_{x,y} dx dy dz$ ossia, $\tau_{xy} v_{x,y}$ per unità di volume. Per il fluido newtoniano $\tau_{xy} = \mu v_{x,y}$ da cui segue $\Phi = \mu (v_{x,y})^2$ che è la (3.304).

²⁶ Nell'ultimo passaggio della (3.208) usiamo il fatto che $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = 0$ sia quando $\underline{\underline{A}}$ è isotropo e $\underline{\underline{B}}$ è deviatorico (traccia nulla), sia quando $\underline{\underline{A}}$ è simmetrico e $\underline{\underline{B}}$ è antisimmetrico.

che contiene tre parametri adimensionali fondamentali nei problemi di trasmissione del calore:

$$\text{numero di Reynolds} \quad \text{Re} = \frac{\rho_0 U L}{\mu} \quad (3.276)$$

$$\text{numero di Prandtl} \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_{p0}}{k_0} \quad (3.277)$$

$$\text{numero di Eckert} \quad \text{Ec} = \frac{U^2}{c_{p0}(T_w - T_0)} \quad (3.278)$$

Per flussi ad elevate velocità, tutti e tre i numeri sono importanti per l'analisi della trasmissione del calore. Per flussi a basse velocità (in cui U è inferiore alla velocità del suono, in modo che sia $M < 0.3$), possiamo trascurare il termine di pressione e quello di dissipazione, restando così solo il numero di Peclet (RePr) come parametro significativo.

3.17 Condizione sul numero di Mach affinché un flusso possa ritenersi incomprimibile

Dalla relazione termodinamica

$$ds = \frac{\rho c_p}{T \alpha_p} d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{\kappa_T c_v}{T \alpha_p} dp \quad (3.279)$$

e tenendo conto dell'equazione di continuità, segue la relazione

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{T \alpha_p}{c_p} \frac{Ds}{Dt} - \frac{1}{\rho c_s^2} \frac{Dp}{Dt} \quad (3.280)$$

che nel caso di flusso omoentropico o stazionario si riduce a

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = -\frac{1}{c_s^2} \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{g}{c_s^2} \underline{v} \cdot \underline{\nabla} z \quad (3.281)$$

Indicando con L la lunghezza caratteristica dei gradienti di velocità e con U l'ordine di grandezza della velocità, la relazione appena scritta implica la seguente relazione fra ordini di grandezza³³

$$O(\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) = O\left(\frac{U^3}{L c_s^2}\right) + O\left(\frac{\rho g \kappa_T U}{\gamma}\right) \quad (3.283)$$

³³ Sfruttiamo l'uguaglianza

$$\frac{g}{c_s^2} = \frac{\rho g \kappa_T}{\gamma} \quad (3.282)$$

Capitolo 4

Statica dei fluidi

Per un fluido in quiete, vale a dire tale che $\underline{v}(x, y, z, t) = \underline{0}$ per ogni (x, y, z, t) , l'equazione di Navier-Stokes (3.148) assume la forma

$$-\underline{\nabla}p + \rho\underline{G} = \underline{0}, \quad (4.1)$$

ma essa, così com'è scritta, vale solo in sistemi di riferimento inerziali. Se il sistema di riferimento rispetto al quale è studiato il flusso non è inerziale, occorre considerare anche le forze fittizie.

4.1 Statica relativa

Se il fluido è in quiete rispetto al riferimento non inerziale, il campo di velocità rispetto ad esso è identicamente nullo, ossia $\underline{v}(x, y, z, t) = 0$ per ogni (x, y, z, t) . Allora l'equazione del moto (3.165) diviene la seguente¹

$$\rho\underline{A} = \rho \left[\frac{d^2\underline{S}}{dt^2} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{r}) \right] = -\underline{\nabla}p + \rho\underline{G}. \quad (4.2)$$

Questa è un'equazione differenziale indefinita, avente come funzione incognita la pressione (termodinamica o meccanica, è lo stesso in questo caso) p : con l'equazione della statica si determina il campo di pressione, cioè come varia nel tempo e nello spazio.

In particolare, nell'ipotesi che la forza di volume sia solo quella di gravità, $\underline{G} = -g\underline{\nabla}z$, si deduce

$$\underline{\nabla}p + \rho g \underline{\nabla}z = -\rho\underline{A}, \quad (4.3)$$

¹ Necessariamente deve essere $d\underline{\Omega}/dt = 0$, altrimenti il fluido non potrebbe essere in quiete rispetto a tale riferimento.

Dinamica dei flussi ideali

L'equazione costitutiva di un fluido newtoniano è data dall'espressione¹

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + \mu (\underline{\underline{\nabla v}} + \underline{\underline{\nabla v}}^\dagger) - \left(\frac{2}{3}\mu - \lambda\right) \underline{\underline{I}} \cdot (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{I}}. \quad (5.1)$$

Si noti che la matrice delle componenti di $\underline{\underline{\tau}}$ ha elementi extradiagonali eventualmente solo se il fluido è in moto. Essi sono proprio i termini che dipendono dalla viscosità, cioè sono indice dell'attrito interno del fluido in movimento. Si consideri il seguente esempio. Sia dato un fluido situato tra due lunghe lastre parallele orizzontali, come mostrato in Figura 5.1. La lastra inferiore è fissa e quella superiore si muove ad una velocità costante V . Il flusso è stazionario, e lo si supponga incomprimibile. Questo tipo di moto è detto moto alla Couette-Poiseuille. Si dimostra nel Capitolo 6 che se la velocità V non è troppo elevata il campo di velocità è monodimensionale e dipende unicamente da y (definita come distanza dalla lastra fissa, in questo caso quella inferiore), $\underline{\underline{v}}(y) = u(y)\underline{\underline{i}}$, dove

$$u(y) = V \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad (5.2)$$

e p è la pressione che risulta funzione solo di x . Poiché un fluido in moto può opporre sforzi di taglio, la forza che tira la lastra superiore deve dunque essere controbilanciata da una forza di uguale intensità e di direzione opposta, altrimenti la lastra dovrebbe accelerare. Tale forza, per la (3.16), è data da

$$\underline{\underline{\sigma}}(h, -\underline{\underline{j}}) = \underline{\underline{\tau}}\Big|_{y=h} \cdot (-\underline{\underline{j}}), \quad (5.3)$$

essendo qui $\underline{\underline{n}} = -\underline{\underline{j}}$; proiettando in direzione x (la direzione della forza cercata), ne deriva²

$$\sigma_x = \underline{\underline{i}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{i}} \cdot [\underline{\underline{\tau}} \cdot (-\underline{\underline{j}})] = -\underline{\underline{i}} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{j}} = -\tau_{xy}, \quad (5.4)$$

che, in base alle (5.1) e (5.2), diventa

$$\sigma_x = -\tau_{xy} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{y=h} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} = -\mu \frac{V}{h} - \frac{h}{2} \frac{dp}{dx}. \quad (5.5)$$

¹ Si veda il risultato (3.128).

² Per comodità di scrittura si sottintende la dipendenza da h di $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\tau}}$.

come già accennato, la condizione di irrotazionalità del flusso è, nella maggior parte dei casi, non realizzata in quanto non in grado di soddisfare la condizione di non-slittamento alla parete.

Esistono invece altre situazioni meno restrittive in cui il contributo del termine $\underline{v} \times \underline{\omega}$ si annulla. A tale scopo si prenda un riferimento locale sulle linee di flusso: $(\underline{i}_s, \underline{i}_n, \underline{i}_b)$ siano, rispettivamente, il versore tangente, il versore normale principale e il versore binormale, che insieme costituiscono la cosiddetta base di Frenet della linea di flusso considerata. Ora, per definizione di linea di flusso, la velocità è, in ogni punto della curva, ad essa tangente, cioè $\underline{v} = v \underline{i}_s$, quindi $(\underline{v} \times \underline{\omega}) \cdot \underline{i}_s = 0$. Sia allora $d\underline{r}$ trattino infinitesimo di una linea di flusso. Essendo parallelo a \underline{i}_s , è anche $(\underline{v} \times \underline{\omega}) \cdot d\underline{r} = 0$. Moltiplicando scalarmente la (5.16) per $d\underline{r}$, si arriva all'espressione

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \cdot d\underline{r} + \frac{1}{\rho} dp + d \left(\frac{v^2}{2} + \phi \right) = (\underline{v} \times \underline{\omega}) \cdot d\underline{r} = 0, \quad (5.32)$$

che, integrata tra due punti lungo la linea di flusso, diventa

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \cdot d\underline{r} + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + \int_1^2 d \left(\frac{v^2}{2} + \phi \right) = 0 \quad (5.33)$$

ossia, con $\phi = gz^8$, per flusso omoentropico ($s = \text{cost}$)

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \cdot d\underline{r} + h_2 - h_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (5.34)$$

per flusso isocoro ($\rho = \text{cost}$)

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \cdot d\underline{r} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (5.35)$$

per flusso barotropico ($\rho = \rho(p)$)

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \cdot d\underline{r} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (5.36)$$

Ognuna delle tre espressioni costituisce una forma del *teorema di Bernoulli generalizzato al caso non stazionario*.

Nel caso in cui il flusso, sia *stazionario*, si perviene all'equazione che traduce il *teorema di Bernoulli*. Ad esempio, per il flusso isocoro si ha

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (5.37)$$

dove 1 e 2 sono due punti appartenenti alla stessa linea di flusso. Esso stabilisce che, per un fluido ideale in moto stazionario e isocoro, il trinomio⁹

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz, \quad (5.40)$$

⁸ Analoghe relazioni si ricavano per $\phi = \Omega^2 r^2 / 2$ che rappresenta il potenziale del campo di forze apparenti centrifughe rispetto ad un sistema rotante.

⁹ Spesso, nell'idrodinamica lo si trova anche scritto nella forma

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z, \quad (5.38)$$

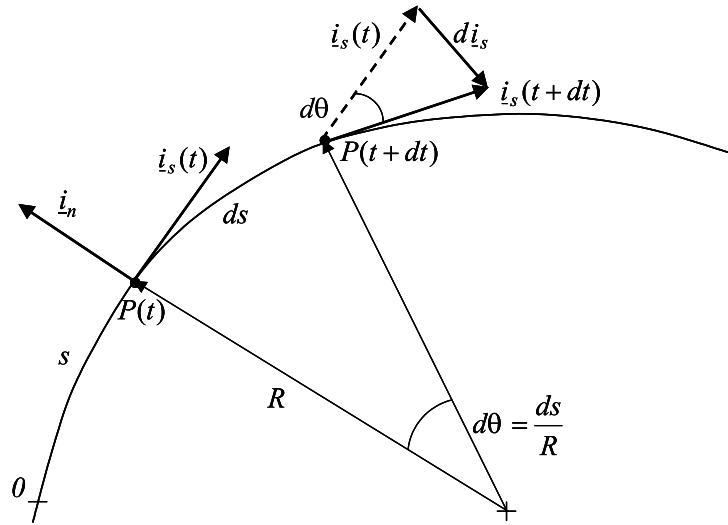


Figura 5.3: Il piano osculatore è definito in un punto P di una linea di flusso dal vettore tangente \underline{i}_s e dal vettore normale \underline{i}_n . Per flusso stazionario la linea di flusso resta invariata nel tempo e coincide con la traiettoria delle particelle.

L'equazione (5.14) può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\partial v^2/2}{\partial s} \underline{i}_s - \frac{v^2}{R} \underline{i}_n + \nabla \phi = 0. \quad (5.44)$$

Nel caso stazionario, con $\phi = gz$ e velocità calcolate rispetto a un sistema di riferimento inerziale ($\Omega = 0$) oppure rotante rispetto a uno inerziale con velocità angolare Ω intorno all'asse z si riduce a

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\partial v^2/2}{\partial s} \underline{i}_s - \frac{v^2}{R} \underline{i}_n + gz + \frac{\Omega^2 r^2}{2} = 0 \quad (5.45)$$

da cui, tenendo conto dell'espressione del gradiente nelle coordinate locali (5.41), per un flusso stazionario barotropico le componenti dell'equazione nella base di Frenet sono¹⁰:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = 0 \quad (5.47)$$

¹⁰ Moltiplicando scalarmente la (5.44), ad esempio, per \underline{i}_s si determina la componente nella direzione tangente alla curva:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \underline{i}_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} + \phi \right) = 0. \quad (5.46)$$

Capitolo 6

Flussi viscosi

Nel capitolo 5 abbiamo definito come schema di fluido ideale quel particolare flusso caratterizzato da viscosità nulla. Tale modello è in realtà puramente teorico, nel senso che i flussi reali sono sempre a viscosità non nulla, seppur a volte molto bassa e quindi trascurabile rispetto ad altri fenomeni concomitanti con il flusso.

L'effetto che la viscosità ha sul moto di un fluido è messo in evidenza mediante l'adimensionalizzazione delle equazioni di bilancio in forma indefinita viste nel Capitolo 3. Poichè è molto frequente il caso in cui il termine $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$ è trascurabile rispetto agli altri, si preferisce (perchè più semplice) adimensionalizzare le equazioni per flussi incomprimibili. Inoltre, sempre per semplicità, assumiamo viscosità μ , conduttività termica k , calori specifici c_v e c_p uniformi, e $\underline{G} = -g \underline{\nabla} z$.

Analizziamo ora i seguenti tipi di flusso, che si differenziano per i valori del numero di Reynolds o per le condizioni al contorno in cui avvengono.

6.1 Creeping flow

Supponiamo che sia $\text{Re} \ll 1$ e che il flusso sia stazionario¹ e incomprimibile. In queste ipotesi, per le precedenti osservazioni, l'equazione (3.267) si semplifica nella

$$0 = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v}, \quad (6.1)$$

che è lineare in \tilde{v} . Applicando ad entrambi i membri l'operatore rotore $\tilde{\nabla} \times$ definito dalla (1.97) otteniamo

$$0 = -\tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \tilde{P} + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla}^2 \tilde{v}, \quad (6.2)$$

che possiamo riscrivere

$$0 = \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 (\tilde{\nabla} \times \tilde{v}) \quad (6.3)$$

¹ Si arriva agli stessi risultati anche nel caso in cui il flusso non dovesse essere stazionario, perchè è sufficiente che l'intervallo di tempo in cui si svolge una variazione significativa di \underline{v} non sia troppo breve.

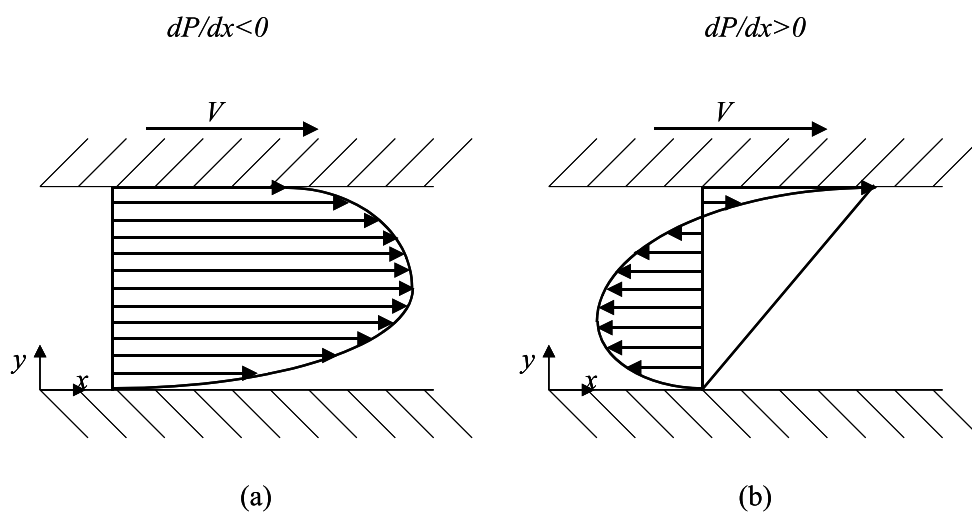


Figura 6.4: Campo di velocità: (a) pressione decrescente lungo x ; (b) pressione crescente lungo x .

la direzione x . I due addendi che compaiono nella (6.23) danno un contributo lineare il primo, parabolico il secondo che, in base al segno di dP/dx , si sommano o sottraggono, dando i profili di velocità di figura (6.4). A seconda dell'entità dei due termini ci sarà un flusso netto verso destra o verso sinistra. Si noti dalla figura (6.4)(b) che, se la pressione cresce nella direzione del moto della lastra superiore, allora il flusso si divide in due parti: quella superiore è trascinata dalla lastra mobile, quella superiore invece subisce maggiormente l'influenza della pressione, che la spinge indietro.

Nota la velocità, è ora possibile calcolare la portata volumetrica e gli sforzi che si originano tra pareti e fluido.

Con riferimento ad un flusso, la *portata volumetrica* attraverso una superficie con giacitura normale a \underline{n} è definita come il volume di fluido che attraversa tale superficie nell'unità di tempo⁷

$$Q_n = \frac{\dot{m}}{\rho} = \int_S \underline{v} \cdot \underline{n} dS. \quad (6.24)$$

Nel nostro caso calcoliamo la portata volumetrica per unità di profondità (avendo supposto questa infinita)

$$Q'_x = \int_0^h u dy = \frac{Vh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dP}{dx} \quad (6.25)$$

e se risulta positiva significa che il flusso avviene nel verso di x , altrimenti nel verso contrario.

⁷ Notare che si tratta di uno scalare, che può assumere sia valori positivi sia negativi (dipende dal segno di $\underline{v} \cdot \underline{n}$).

Rileviamo nella (6.53) un andamento lineare in y dato dal primo termine a secondo membro, e un andamento parabolico legato alla viscosità μ e alla conduttività termica k . Il contributo massimo della parte parabolica si ha in corrispondenza di $y = h/2$ e vale

$$(T_{max} - T_0) \Big|_{\Phi} = \frac{\mu V^2}{8k} \quad (6.54)$$

e non appena la differenza $T_h - T_0$ è superiore a qualche grado, il termine parabolico è trascurabile rispetto a quello triangolare. Definito il *numero di Eckert* come il rapporto tra l'energia cinetica e quella termica del flusso

$$Ec = \frac{V^2}{c(T_h - T_0)}, \quad (6.55)$$

e ricordando che il numero di Prandtl è definito come il rapporto fra le diffusività di quantità di moto e termica

$$Pr = \frac{\mu c}{k} \quad (6.56)$$

ne segue che se $EcPr$ è grande il termine parabolico è da considerare, mentre se $EcPr$ è piccolo l'effetto della dissipazione viscosa sul profilo di temperatura è trascurabile.

Sia ora $dP/dx \neq 0$, allora l'espressione della velocità u (6.23) non è lineare in y , dunque la sua derivata rispetto ad y dipende da y , così per la (6.45) anche la funzione di dissipazione Φ . L'equazione (6.48) assume la forma

$$0 = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{V}{h} - \frac{h}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \right)^2, \quad (6.57)$$

che integrata dà un polinomio del quarto grado in y

$$\begin{aligned} T(y) = & -\frac{y^4}{12\mu k} \left(\frac{dP}{dx} \right)^2 + \frac{y^3}{6} \left[\frac{h}{\mu k} \left(\frac{dP}{dx} \right)^2 - \frac{2V}{hk} \frac{dP}{dx} \right] + \\ & + \frac{y^2}{2} \left[\frac{V}{k} \frac{dP}{dx} - \frac{\mu V^2}{kh^2} - \frac{h^2}{4\mu k} \left(\frac{dP}{dx} \right)^2 \right] + \\ & + y \left[\frac{T_h - T_0}{h} + \frac{\mu V^2}{2hk} - \frac{Vh}{6k} \frac{dP}{dx} + \frac{h^3}{24\mu k} \left(\frac{dP}{dx} \right)^2 \right] + T_0 . \end{aligned} \quad (6.58)$$

- Supponiamo ora che il fluido acquisisca calore attraverso la parete inferiore senza poterlo trasmettere tutto verso l'alto mediante quella superiore, come ad esempio se quest'ultima è una parete adiabatica. In tal caso il profilo di temperatura non risulta pienamente sviluppato, dato che il flusso termico

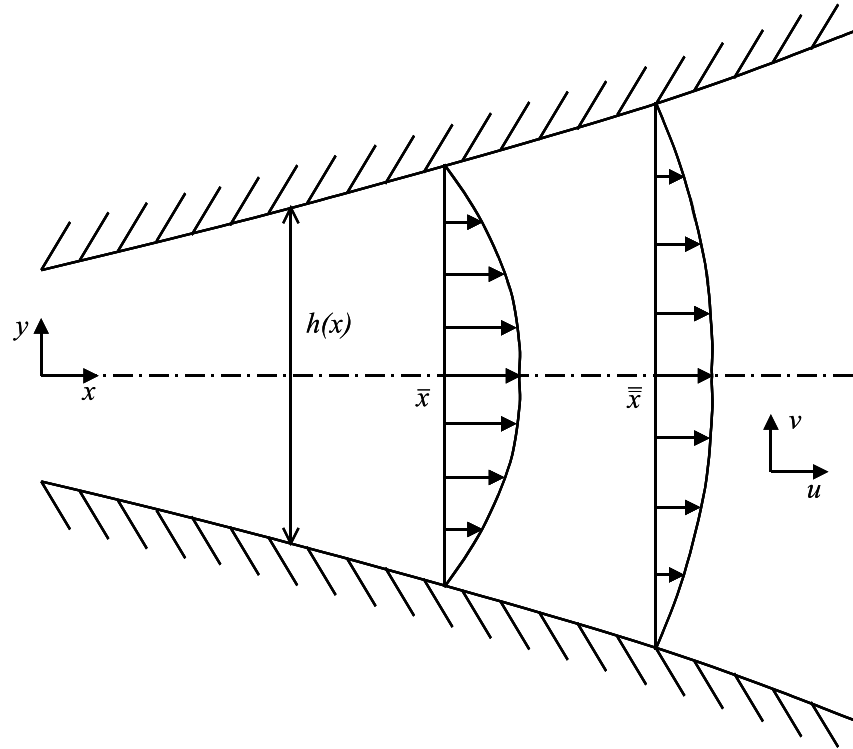


Figura 6.8: Esempio di geometria a sezione variabile in cui è possibile applicare le relazioni (6.38)-(6.42) se valgono le ipotesi (6.78) di flusso localmente pienamente sviluppato quasi senza inerzia.

6.3 Flussi localmente pienamente sviluppati quasi senza inerzia

Le espressioni appena viste sono state ricavate in ipotesi che conferiscono all'equazione di Navier-Stokes (3.149) quella forma particolare in cui i termini d'inerzia sono nulli, ma esse continuano a valere anche quando, pur essendo non nulli, sono comunque trascurabili rispetto ai termini viscosi. Rientrano in questa tipologia di moti i *flussi localmente pienamente sviluppati quasi senza inerzia* in cui domina quindi la viscosità μ .

Le condizioni in cui si hanno tali tipi di flusso sono le seguenti:

$$\frac{\rho h^2}{\mu t_c} \ll 1, \quad h \frac{dh}{dx} \ll \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \ll 1, \quad \left| \frac{dh}{dx} \right| \ll 1, \quad \frac{\rho u_m h}{\mu} \left| \frac{dh}{dx} \right| \ll 1 \quad (6.78)$$

dove dh/dx rappresenta la rapidità di variazione dell'ampiezza del condotto e t_c il tempo caratteristico dell'eventuale transitorio in corso. Le condizioni (6.78) in sostanza significano che i termini instazionari e convettivi sono trascurabili rispetto a quelli viscosi nelle equazioni (6.9) e (6.10), anche in una situazione geometrica (vedi Figura 6.8) in cui la distanza h fra le pareti fra cui scorre il fluido non è

Affinchè anche A_x possa essere trascurato nei confronti di D_x , occorre che sia verificata la condizione

$$\frac{A_x}{D_x} = \frac{\rho \frac{u_m}{\tau}}{\mu \frac{u_m}{h^2}} = \frac{\rho h^2}{\mu \tau} \ll 1, \quad (6.105)$$

che è la prima delle (6.78) ed è equivalente ad assumere che il moto sia agli effetti pratici stazionario.

Alla luce delle suddette osservazioni, delle due equazioni (6.9) e (6.10) resta soltanto la prima e assume la forma semplificata approssimata

$$0 \sim -\frac{dP}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.106)$$

che è proprio quella che governa il moto alla Couette-Poiseuille (si veda l'equazione (6.17)). La soluzione è data dall'espressione (6.38)

$$u(x, y) = -\frac{h^2(x)}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left[\frac{y}{h(x)} \left(1 - \frac{y}{h(x)} \right) \right] + V \frac{y}{h(x)}, \quad (6.107)$$

dove V è anche qui la velocità con cui si muove la parete superiore. Per quanto concerne la portata volumetrica e la velocità media la (6.39) e la (6.40) divengono

$$Q'_x = -\frac{h^3(x)}{12\mu} \frac{dP}{dx} + \frac{Vh(x)}{2} \quad (6.108)$$

$$u_m = -\frac{h^2(x)}{12\mu} \frac{dP}{dx} + \frac{V}{2}. \quad (6.109)$$

6.4 Elementi di teoria della lubrificazione

E' noto dall'esperienza comune che due corpi solidi possono scorrere l'uno sull'altro molto facilmente nel caso in cui fra essi vi sia un sottile strato di fluido, nel quale sotto certe condizioni sia imposta una elevata pressione, di segno positivo. Ad esempio, un foglio di carta caduto su un pavimento liscio tende a "galleggiare" su uno strato sottile di aria formatosi tra il pavimento e il foglio stesso, il quale è così capace di scivolare orizzontalmente per un certo tratto prima di arrestarsi. L'esistenza di una elevata pressione nel film di fluido tra le due superfici è largamente usata nella pratica ingegneristica per sostituire l'attrito tra fluido e solido all'attrito tra due corpi solidi in contatto tra loro; una volta che tale pressione è stata creata, lo strato di fluido offre una grande resistenza all'azione di compressione e produce un effetto di "lubrificazione" tra le due superfici. In taluni casi lo strato di fluido può essere usato per sopportare un carico, e la lubrificazione è detta di "supporto".

L'essenza del fenomeno sta nel fatto che, essendo molto sottile lo spessore dello strato di fluido tra le due pareti solide, la velocità di deformazione e lo sforzo

ma, essendo $T = T_f(r) + T_m(z)$, rimane

$$\int_0^R v_z T_f 2\pi r dr = 0 \quad (6.182)$$

che in base a (6.179) e (6.180) permette di determinare il valore di

$$T_R - T_m = \frac{11}{48} \frac{\rho c V_m R^2}{k} \frac{dT_m}{dz} = -\frac{11}{48} \frac{2q''_{Rw} R}{k}, \quad (6.183)$$

pertanto la (6.180) assume la forma

$$T_f(r) = \frac{q''_{Rw}}{4R^3 k} (3R^4 - 4R^2 r^2 + r^4) - \frac{11q''_{Rw}}{24k}. \quad (6.184)$$

Da notare che il flusso termico alla parete si può scrivere nella forma

$$q''_{Rw} = \frac{48}{11} \frac{k}{2R} (T_m - T_R), \quad (6.185)$$

in cui

$$h = \frac{48}{11} \frac{k}{2R} \quad (6.186)$$

è il coefficiente di convezione. Ritroviamo così la correlazione per il numero di Nusselt nel caso di flusso laminare in un condotto a flusso termico imposto:

$$Nu = \frac{h 2R}{k} = \frac{48}{11} = 4.36. \quad (6.187)$$

6.6 Il problema di Rayleigh

Analizziamo ora il caso di un fluido di densità ρ , viscosità dinamica μ e temperatura T uniformi e permanenti, soggetto a forze specifiche di massa $\rho \underline{G}$, a contatto con una lastra. Entrambi sono inizialmente in quiete. All'istante $t = 0$ la lastra si mette in moto con una velocità \underline{V} e grazie alla viscosità, col passare del tempo, la quantità di moto si trasmette al fluido, diffondendosi in punti del fluido sempre più lontani dalla lastra. E' questa una situazione analoga al problema di transitorio termico in un mezzo solido semi-infinito, inizialmente a temperatura uniforme T_i sul quale applichiamo alla superficie di interfaccia con l'ambiente circostante, all'istante $t = 0$, una temperatura $T_0 \neq T_i$; allora, col passare del tempo, l'energia termica si diffonde grazie alla conduttività termica, variando la temperatura man mano a distanza sempre maggiore dall'interfaccia, tendendo a raggiungere, in un tempo infinito, il valore T_0 in ogni punto.

Supponiamo infinite le dimensioni della lastra, cosicchè la simmetria che ne deriva mandi a zero le derivate nelle direzioni x , quella del moto della lastra, e z , la profondità (Figura 6.11). Non solo, nella direzione z la componente della velocità è addirittura nulla, $w = 0$.

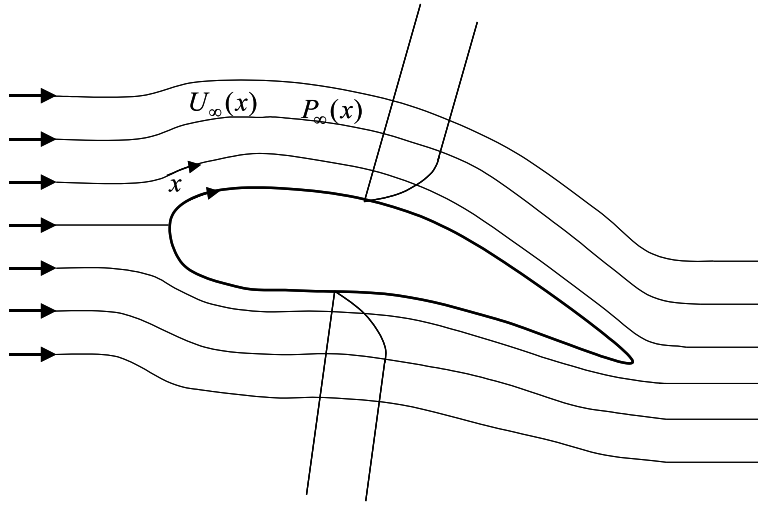


Figura 6.15: Lo strato limite su un corpo di forma arrotondata.

la lunghezza caratteristica che rende di ordine 1 il termine $\tilde{\nabla}^2 \tilde{u}$ nell'equazione del moto adimensionalizzata (3.267) è proprio lo spessore δ dello strato limite, quasi sempre di ordine di grandezza molto inferiore della dimensione L che invece caratterizza il flusso esternamente allo strato adiacente alla parete. Il contrasto fra le condizioni $Re_L \gg 1$ e $Re_\delta \sim 1$ rende possibile, e utile, separare il flusso in due zone, una inviscida, quella esterna allo strato limite, e una viscosa, laminare o turbolenta, vicina alla parete dove le condizioni di aderenza attiva i meccanismi di trasporto della quantità di moto (viscosità e sforzi di Reynolds, per il flusso turbolento).

Consideriamo il caso di un flusso incomprimibile bidimensionale, per il quale le equazioni rilevanti sono quella di continuità, le due del moto e quella dell'energia:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.220)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.221)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6.222)$$

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi \quad (6.223)$$

Nello strato limite il campo di velocità è del tipo $\underline{v}(x, y) = u(x, y)\underline{i} + v(x, y)\underline{j}$, avendo considerato una superficie che si estende indefinitamente nel senso della profondità, per cui, per simmetria, in tale direzione non vi è moto. L'equazione di continuità (3.2) assume la forma $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$, che esplicitando diventa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.224)$$

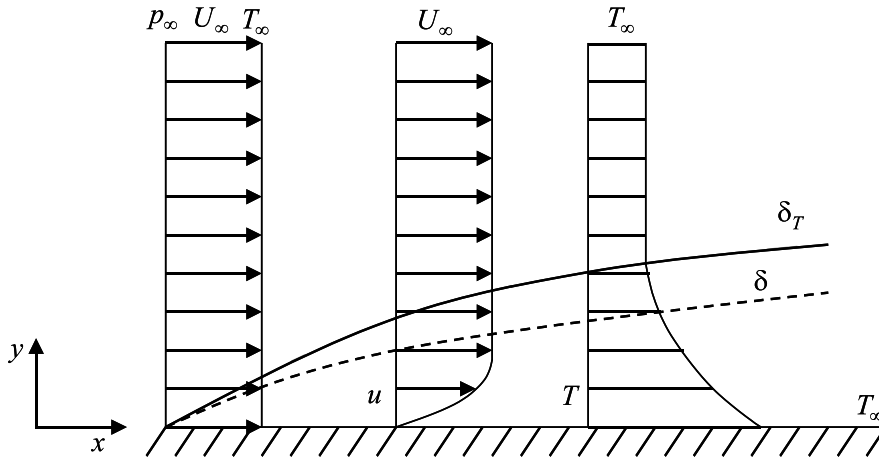


Figura 6.19: Il problema di Blasius: profilo di temperatura.

6.8.2 Profilo di temperatura nello strato limite

Determiniamo ora il profilo di temperatura per lo strato limite. Osserviamo innanzitutto che, essendo il flusso incomprimibile, l'equazione dell'energia è slegata dall'equazione della quantità di moto e da quella di continuità (si veda pag. 63). L'equazione dell'energia (3.237) per il problema di Blasius è un'equazione lineare in T , dunque si può risolvere per sovrapposizione degli effetti. Vediamo nel dettaglio.

L'equazione dell'energia (3.237) si riduce alla forma

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.271)$$

dato che il moto è stazionario per ipotesi, il termine $\partial^2 T / \partial x^2$ è trascurabile rispetto a $\partial^2 T / \partial y^2$ in quanto la direzione principale del ∇T è quella lungo y (trasversale alla direzione principale del flusso), e la funzione di dissipazione dell'energia Φ è trascurabile rispetto a $k (\partial^2 T / \partial y^2)$, visto che³⁶

$$\frac{\Phi}{k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} = \frac{\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}{k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} \sim \frac{\mu \frac{U_\infty^2}{\delta^2}}{k \frac{\Delta T}{\delta^2}} = \frac{\mu U_\infty^2}{k(T_w - T_\infty)} = \text{Pr Ec} \quad (6.274)$$

³⁵ Notare che lo sforzo τ_w ha le dimensioni del termine ρU_∞^2 , essendo sia $f''(0)$ sia $\sqrt{\nu/U_\infty x}$ adimensionali.

³⁶ Ricordiamo che il numero di Prandtl è definito da

$$\text{Pr} = \frac{\mu c}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (6.272)$$

e il numero di Eckert da

$$\text{Ec} = \frac{U_\infty^2}{c(T_w - T_\infty)}. \quad (6.273)$$

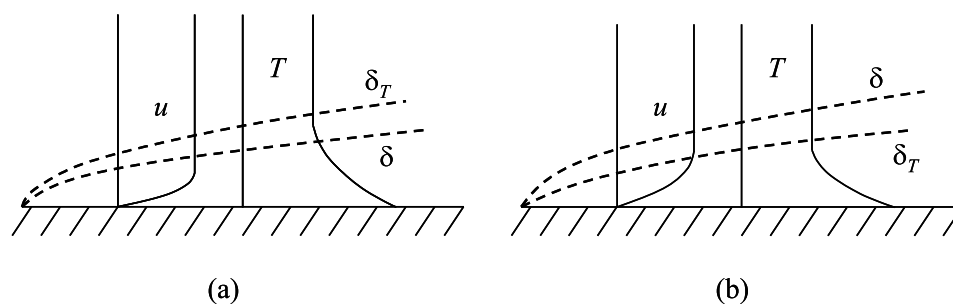


Figura 6.20: Il problema di Blasius: (a) caso dei metalli liquidi, in cui δ_T cresce più rapidamente di δ ; (b) caso degli oli pesanti, per i quali negli strati più vicini alla parete la viscosità μ subisce l'influenza della temperatura, nel senso che all'aumentare della T , diminuisce μ e di conseguenza diminuisce anche lo sforzo alla parete τ_w .

Lo spessore dello strato limite della temperatura δ_T si può dimostrare che vale³⁸

$$\delta_T = 5 \frac{x}{(\text{Re}_x)^{\frac{1}{2}} (\text{Pr})^{\frac{1}{3}}}, \quad (6.284)$$

da cui, in base alla (6.264), si trova

$$\frac{\delta_T}{\delta} = (\text{Pr})^{-\frac{1}{3}} \quad (6.285)$$

che risulta quindi funzione esclusivamente delle proprietà termofisiche del fluido (non dipende nè da U_∞ , nè da T_∞ , nè dalle condizioni al contorno), e se $\text{Pr} = 1$, anche $\delta_T/\delta = 1$.

6.8.3 Analogia di Reynolds tra sforzo alla parete e flusso termico specifico.

Abbiamo determinato lo sforzo alla parete τ_w e abbiamo trovato che è proporzionale a $f''(0)$ (si veda la (6.265), cioè è possibile calcolarlo una volta noto il profilo di velocità adimensionalizzato F , di cui f'' è la derivata prima rispetto a η , essendo per definizione $F = df/d\eta$). In modo del tutto simile si deduce che il flusso termico specifico q_w'' si calcola dalla derivata prima del profilo di temperatura adimensionalizzato, valutato alla parete: infatti, secondo la (2.3) il flusso termico specifico è dato da

$$q_w'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = k(T_w - T_\infty) \theta'(0) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}. \quad (6.286)$$

³⁸ Noi non l'abbiamo calcolato.

(per $0,03 < Pr < 0,1$) e il numero di Nusselt vale

$$Nu_x = \frac{0,569\sqrt{Pr}}{1 + 0,9\sqrt{Pr}} Re_x^{\frac{1}{2}}. \quad (6.291)$$

Questo è il caso dei metalli liquidi.

Se invece è imposto il flusso termico alla parete $q_w = cost$, abbiamo

- $\theta'(0) = 0,458Pr^{\frac{1}{3}}$ (per $Pr > 0,5$),

-

$$\theta'(0) = \frac{0,88\sqrt{Pr}}{1 + 1,317\sqrt{Pr}} \quad (6.292)$$

(per $0,006 < Pr < 0,03$).

Si osservi che, a parità del numero di Prandtl Pr , si ha

$$\theta'(0)_{q_w} > \theta'(0)_{T_w}. \quad (6.293)$$

6.9 Metodo approssimato di von Karman-Pohlhausen e Thwaites

Si tratta di un metodo approssimato per determinare, a proposito di un flusso, lo spessore dello strato limite del campo di velocità $\delta(x)$ e di quello del campo di temperatura $\delta_T(x)$. L'approssimazione consiste nello scegliere un profilo di velocità (e di temperatura) che non soddisfi le equazioni del moto in ogni punto, ma solo in alcuni punti. Questi profili di velocità, scelti opportunamente come vediamo qui di seguito, vengono usati per calcolare grandezze caratterizzanti il flusso, quali appunto lo spessore dello strato limite δ e lo sforzo alla parete τ_w .

6.9.1 Calcolo dello spessore dello strato limite del campo di velocità δ .

Il rallentamento che il flusso subisce per effetto della presenza della parete ha due effetti:

1. Genera un difetto di portata massica. La portata massica in corrispondenza di una sezione qualsiasi (per un generico x) e per unità di profondità è data da

$$\dot{m} = \int_0^\infty \rho u dy = \rho \int_0^\infty u dy \quad (6.294)$$

o anche, moltiplicando per $U_\infty \delta_m / \nu$,

$$\frac{\delta_m}{\nu U_\infty} \frac{\partial(U_\infty \delta_d)}{\partial t} + \left(\frac{\delta_d}{\delta_m} + 2 \right) \frac{\delta_m^2}{\nu} \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{U_\infty}{\nu} \frac{\partial \delta_m^2}{\partial x} = \frac{\tau_0 \delta_m}{\mu U_\infty} . \quad (6.329)$$

L'equazione (6.328) è nota come *equazione di von Karman* (1921), la (6.329) è una riscrittura della stessa proposta da Holstein e Bohlen (1940) e usata come base per l'approccio di Thwaites (1949) discusso più avanti.

L'equazione (6.328), anche nel caso in cui U_∞ sia funzione nota, contiene più di una incognita, precisamente δ_d , δ_m e τ_w , dunque sono necessari altri elementi per risolverla. Ma se scegliamo una forma del profilo di velocità, sono noti allora i parametri α_d e α_m , che secondo definizione danno le relazioni

$$\delta_d = \alpha_d \delta \quad (6.330)$$

e

$$\delta_m = \alpha_m \delta ; \quad (6.331)$$

inoltre, dalla (6.314) ricaviamo

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \beta \frac{\mu U_\infty}{\rho \delta} = \beta \nu \frac{U_\infty}{\delta} . \quad (6.332)$$

Sostituendo nella (6.328) e dividendo per U_∞ / δ perveniamo ad un'equazione differenziale alle derivate parziali nella sola incognita $\delta = \delta(x, t)$, che ricordiamo essere lo spessore dello strato limite (all'istante t e in posizione x),

$$\frac{\delta}{U_\infty} \frac{\partial}{\partial t} (U_\infty \alpha_d \delta) + (2\alpha_m + \alpha_d) \delta^2 \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \delta U_\infty \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_m \delta) = \beta \nu \quad (6.333)$$

nota come *equazione di von Karman-Pohlhausen*. Questa equazione permette di determinare la funzione $\delta = \delta(x, t)$ una volta sia noto il profilo di velocità all'interno e all'esterno dello strato limite. Ma se si opta per il profilo di Pohlhausen, α_d , α_m e β dipendono dal parametro Λ , che è legato al campo di velocità esterno U_∞ dalla relazione⁴⁵

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu U_\infty} \left(\frac{\partial U_\infty}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \right) , \quad (6.335)$$

dunque Λ è funzione sia di t sia di x , $\Lambda = \Lambda(x, t)$. Ne segue che con il profilo di Pohlhausen si hanno due incognite, $\Lambda(x, t)$ e $\delta(x, t)$, quindi l'equazione (6.333) non consente da sola di arrivare alla soluzione del problema (determinare cioè $\delta(x, t)$), ma occorre associarle un'altra equazione, per esempio la (6.335), per formare così un sistema chiuso.

⁴⁵ Si deriva dalla posizione fatta in (6.317), secondo cui $\Lambda = -F''(0)$, e dalla relazione (6.309) che intercorre tra $F''(0)$ e dp_∞/dx , ovvero

$$F''(0) = \frac{\delta^2}{\mu U_\infty} \frac{dp_\infty}{dx} . \quad (6.334)$$

perchè in sostanza nel tratto di avviamento il profilo di velocità varia, quindi non può essere di un solo tipo (solo cubico, solo parabolico, solo rettilineo), cioè descritto da un'unica F per ogni x nel tratto di avviamento.

Altri risultati che si possono trarre dalla presente discussione sono i seguenti: la velocità nel cuore del flusso, all'esterno dello strato limite, è legata alla velocità che il flusso ha prima di entrare nel condotto dalla

$$U_e \left(x \Big|_{\delta=\frac{D}{2}} \right) = \frac{U_\infty}{1 - \alpha_d} \quad (6.373)$$

e per la pressione vale

$$p_\infty - p_e \left(x \Big|_{\delta=\frac{D}{2}} \right) = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left[\frac{1}{(1 - \alpha_d)^2} - 1 \right], \quad (6.374)$$

relazione che esprime una perdita di carico concentrata.

6.9.7 Metodo di Thwaites per flusso stazionario

L'equazione (6.329) suggerisce la definizione dei seguenti parametri adimensionali

$$H = \frac{\delta_d}{\delta_m} \quad (6.375)$$

$$\lambda = \frac{\delta_m^2}{\nu} \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \quad (6.376)$$

$$S = \frac{\tau_0 \delta_m}{\mu U_\infty} \quad (6.377)$$

così che vale l'identità

$$\frac{1}{2} \frac{U_\infty}{\nu} \frac{\partial \delta^2}{\partial x_m} = \frac{1}{2} U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{\partial U_\infty / \partial x} \right) \quad (6.378)$$

e quindi l'equazione (6.329) per flusso stazionario sia all'interno che all'esterno dello strato limite può essere riscritta nella forma

$$U_\infty \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda}{dU_\infty/dx} \right) = 2 [S - (H + 2)\lambda] \quad (6.379)$$

Il metodo di Thwaites si basa sull'osservazione semiempirica che un notevole numero di dati sperimentali ottenuti in varie configurazioni geometriche e di flusso esterno cadono su un'unica curva se presentati su un diagramma $S - \lambda$ e su un diagramma $H - \lambda$. Questo significa che in buona approssimazione S e H sono funzioni di λ soltanto. In particolare, per S si ha la correlazione empirica

$$S = (\lambda + 0.09)^{0.62} \quad (6.380)$$

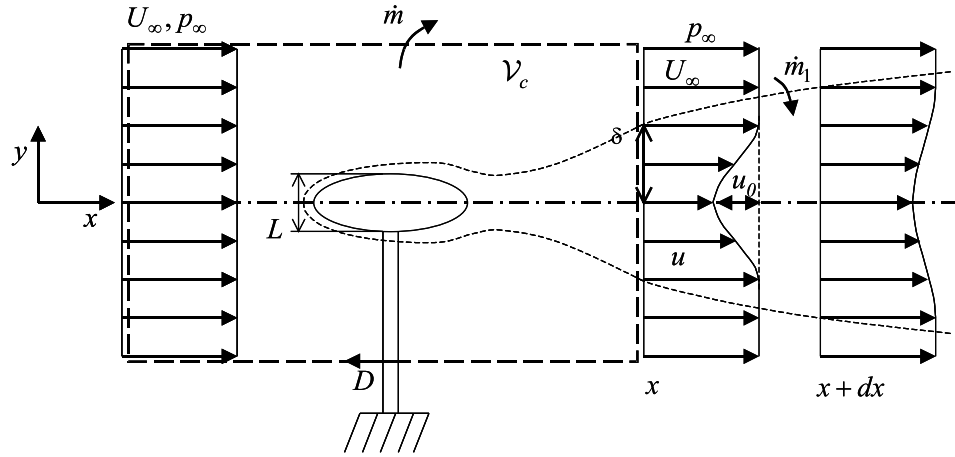


Figura 6.37: Scia laminare.

Consideriamo quindi un flusso viscoso e stazionario, di velocità U_∞ e densità ρ uniformi, che investe un oggetto di forma arrotondata, dotato di simmetria assiale e di dimensione infinita nella direzione perpendicolare alla direzione del flusso (quella perpendicolare al foglio), per cui l'oggetto è caratterizzato da solo due dimensioni. Sia L la dimensione caratteristica dell'ostacolo, quella che influisce sul profilo di velocità, come mostrato in figura (6.37).

Il corpo che viene a trovarsi sulla traiettoria del flusso costituisce un ostacolo, poichè come è evidente le particelle di fluido vengono da esso deviate e frenate per viscosità, pertanto il campo di velocità subisce una modificazione simile a quella che ha nell'incontrare una lastra piana, nel senso che viene a formarsi una zona simmetrica attorno all'asse di simmetria dell'oggetto, in cui la velocità è minore di U_∞ e ha un andamento simile a quello trovato per lo strato limite: man mano che il flusso procede in direzione x il difetto tende a diminuire e ad allargarsi in direzione y , con la conseguente formazione di un "doppio strato limite", di semispessore δ , che costituisce la scia laminare che vogliamo studiare.

Considerato un volume di controllo fisso \mathcal{V}_c come in figura (6.37), tale che sia interessato dal flusso prima e dopo l'incontro con l'ostacolo in modo che sia $p = p_\infty$ su entrambe le sezioni di ingresso e di uscita, e che la scia e l'ostacolo siano interamente contenuti in \mathcal{V}_c . Il bilancio di massa in queste ipotesi è dato da

$$\frac{\dot{m}}{\rho} = U_\infty \delta - \int_0^\delta u \, dy = \int_0^\delta (U_\infty - u) \, dy, \quad (6.438)$$

dove \dot{m} è la portata massica che esce da \mathcal{V}_c , mentre il bilancio della quantità di moto è il seguente

$$-\frac{D}{\rho} = \int_0^\delta u^2 \, dy - U_\infty^2 \delta + \frac{\dot{m}}{\rho} U_\infty = - \int_0^\delta u (U_\infty - u) \, dy, \quad (6.439)$$

essendo D la resistenza aerodinamica opposta dal corpo all'azione del flusso. Dato che D non dipende da x , l'ultimo termine a destra della (6.439) è costante, costituendo così un'invariante per il flusso.

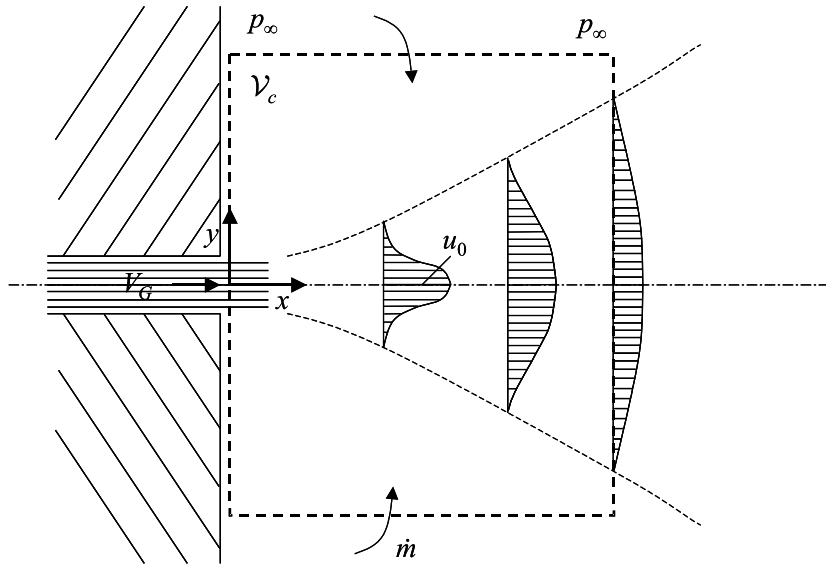


Figura 6.38: Scia laminare prodotta da un getto laminare bidimensionale.

velocità massima u_0 (delle particelle sull'asse del getto), e si espande in senso verticale la zona occupata dal flusso, cioè dalle particelle di fluido in movimento. Considerato un volume di controllo tra la sezione di sbocco e un generico x , il bilancio della quantità di moto (2.84) dà la relazione

$$\int_{\mathcal{A}_c} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = 0 \quad (6.453)$$

essendo la gravità trascurabile, il moto stazionario e la pressione uniforme su tutta la superficie del volume di controllo \mathcal{A}_c ⁶⁶, che dà la seguente relazione⁶⁷

$$\frac{J}{\rho} = \int_0^\delta u^2 dy, \quad (6.456)$$

avendo posto

$$J = \int_{\mathcal{A}_G} \rho V_G dA, \quad (6.457)$$

⁶⁶ Se la pressione su una superficie chiusa è uniforme, la forza netta di pressione agente sulla superficie è nulla: infatti abbiamo

$$F = \int_S p(-\underline{n}) dS = -p \int_S \underline{n} dS = 0 \quad (6.454)$$

, l'ultima uguaglianza derivante dai teoremi di Gauss (1.112), punto (i), applicato per $\Phi = 1$.

⁶⁷ Se il condotto è a sezione circolare, il flusso è tridimensionale, e il bilancio della quantità di moto dà

$$\frac{J}{\rho} = \int_0^\delta u^2 2\pi r dr. \quad (6.455)$$

Indice analitico

- accelerazione
 - campo di, 6
- attrito viscoso, 116
- barotropico, flusso, 120
- Bernoulli
 - teorema di, 118, 121, 127
 - trinomio di, 122
- bilancio di massa, 30
- bilancio di quantità di moto, 31
- Blasius, 174
 - equazione del moto, 178
 - equazione dell'energia, 181
 - funzione di, 178
 - sforzo alla parete, 179
- calore, 27
- calore specifico a volume costante, 92
- campo
 - di accelerazione, 6
 - di densità, 6
 - di pressione, 6
 - di temperatura, 6
 - di velocità, 6
- cinematica, viscosità, 75
- circolazione, 22, 84
- coefficiente
 - di attrito radente, 179
 - di comprimibilità isoterma, 92
 - di conduttività termica, 93
 - di Coriolis, 162
 - di dilatazione isobara, 92
 - di viscosità dinamica, 75
- componente deviatorica, 68, 73, 89
- condizioni al contorno, 80
- conduttività termica, 28, 93
- continuità
 - equazione di, 53
- continuità, ipotesi, 1
- convettivo, 9
- Couette-Poiseuille
 - moto alla, 115
 - moto alla -, profilo di temperatura, 147, 150
 - moto alla -, profilo di velocità, 141, 144
- creeping flow, 137
- deformazioni, 70
 - rapidità delle, 67
- densità
 - campo di, 6
 - media, 1
 - puntuale, 1
- derivata sostanziale o materiale, 10
- descrizione euleriana, 5
- descrizione lagrangiana, 5
- diadiche, 12
- diametro equivalente, 99
- diffusione
 - di massa, 28
 - di quantità di moto, 28
 - termica, 27
- diffusività termica, 181
- dissipazione viscosa, 90
- dissipazione, funzione di, 89
- divergenza, 18
- divergenza, teorema di Gauss-Green, 22
- Eckert, numero di, 147
- elastico, comportamento, 71
- energia
 - equazione indefinita di bilancio, 87, 88
 - interna, 88
 - meccanica, 89
- entropia, 83
- entalpia, 91, 119
- entropia
 - equazione indefinita di bilancio, 85
 - generazione per irreversibilità, 93
- equazione
 - della statica, 105
 - di continuità, 53

- di Eulero, 117
- di Navier-Stokes, 78, 79
- di stato, 63
- globale dell'equilibrio dinamico, 50
- indefinita del moto, 61
- indefinita dell'energia, 87, 88
- indefinita dell'energia interna, 88
- indefinita dell'entropia, 85
- indefinita della vorticità, 82
- indefinita per l'energia interna, 88
- indefinita per l'energia meccanica, 88
- indefinita per l'entalpia, 91
- indefinita per la temperatura, 91
- equazione costitutiva, 63, 73
 - di un fluido newtoniano, 76
 - di un fluido viscoelastico, 78
- euleriana
 - descrizione, 5
- Eulero, 127
- Eulero, equazione di, 117
- Fick, legge di, 28
- fluidi newtoniani, 73
- fluido, 27
- flusso
 - a lento scorrimento, 137
 - a potenziale, 128
 - barotropico, 120
 - di massa, 3
 - di un campo vettoriale, 21
 - incompressibile, 54
 - incomprimibile, 54
 - irrotazionale, 127
 - isocoro, 119, 120, 127
 - metodi di visualizzazione, 7
 - omoentropico, 119, 120
 - stazionario, 7
- flusso convettivo specifico
 - di quantità di moto, 61
 - termico, 87
- flusso diffusivo specifico, 28
- flusso ideale, 116
- flusso inviscido, 117
- flusso termico specifico, 28, 34, 87
- Fourier, legge di, 28, 93, 148
- funzione di dissipazione, 89, 90
- getto laminare, 213
- gradiente, 16
- Helmholtz
 - teorema di, 83
 - equazione indefinita della vorticità, 83
- Hessiano, 18, 94
 - della temperatura, 94
- Hooke, legge di, 77
- incompressibile, flusso, 54
- incomprimibile, flusso, 54
- ipotesi
 - del quasi-equilibrio locale, 3
 - di continuità, 1
- irrotazionale, flusso, 127
- isocoro, flusso, 119, 120, 127
- Jacobiano, 17
- Karman, 184
- Karman, von
 - equazione di, 192
- Karman-Pohlhausen
 - equazione di, 192
- Kelvin, teorema di, 84
- Lagrange, teorema di, 83
- lagrangiana
 - descrizione, 5
- Lamé, coefficienti di, 77
- laplaciano, 20
- lavoro di pulsione, 48
- legge
 - di Fourier, 148
- legge di Fick, 28
- legge di Fourier, 28, 93
- legge di Hooke, 77
- legge di Navier, 29
- legge di Newton, 31, 75
- legge di Pascal, 60
- Levi-Civita, simbolo di, 19
- libero cammino medio, 1
- lift, 127
- linea di corrente, 7, 23
- linea di flusso, 7, 23
- linea di fumo, 7, 23
- linea di traccia, 7, 23
- linee di vorticità, 84
- lubrificazione, 155

- lunghezza di avviamento, 195
- massa
 bilancio, 30
- modulo di rilassamento, 78
- modulo di Young, 77
- moto
 equazione indefinita del, 61
 laminare, 118
 turbolento, 118
- Navier, legge di, 29
- Navier-Stokes, equazione di, 78, 79
- Newton, legge di, 75
- newtoniano, fluido, 73
- omoentropico, flusso, 119, 120
- Pascal, principio di, 60
- pathline, 7, 23
- Pohlhausen, 184
 profilo di, 190
- Poiseuille
 moto alla -, profilo di temperatura, 166
 moto alla -, profilo di velocità, 161
- portata
 volumetrica, 142
- pressione
 campo di, 6
 meccanica, 73
 termodinamica, 73
- prodotto
 esterno, 12
 scalare
 fra tensori, 14
 fra vettori, 9, 11
 fra vettori e tensori, 13
 semi- scalare, 14
 tensoriale, 12
 vettoriale
 fra vettori, 11
 fra vettori e tensori, 16
- profilo alare, 126
- proprietà termodinamiche locali, 3
- quantità di moto
 bilancio, 31
 equazione indefinita di bilancio, 61
- quasi-equilibrio locale, ipotesi del, 3
- Rayleigh
 problema di, 166
 sforzo alla parete, 170
 soluzione del problema di, 169
- Reynolds
 numero di, 117
 teorema di, 38, 43
- rotore, 20
- Scie laminari, 210
- sforzi, tensore degli, 143
- sforzo, 56
- sistema semplice, 29
- spessore
 di spostamento di portata, 185
 di spostamento di quantità di moto, 185
- stazionario, flusso, 7
- strato limite
 equazioni dello, 174
 regione dello, 171
- streakline, 7, 23
- streamline, 7, 23
- temperatura, 91
 campo di, 6
- tensore, 12
 degli sforzi, 55, 57, 76
 del flusso convettivo specifico di quantità di moto, 61
 della conduttività termica, 28, 94
 della rapidità delle deformazioni, 67
 della velocità di rotazione rigida, 66
 delle deformazioni, 70
 deviatorico, 59, 68, 73
 gradiente di velocità, 65
 Hessiano, 18
 identità, 14
 isotropo, 14, 15, 73
 isotropo del quarto ordine, 74
 Jacobiano, 17
 Jacobiano della velocità, 65
 simmetrico, 13
- tensore degli sforzi, 143
- teorema
 del trasporto, 38, 43
 della quantità di moto, 44
 di Bernoulli, 118, 121, 127
 di Bernoulli generalizzato, 121

- di Helmholtz, 83
- di Kelvin, 84
- di Lagrange, 83
- termodinamica, 3
- Thwaites, 184
 - metodo di, 199
- traccia, 14
- traiettoria, 7, 23
- tubo di vorticità, 84

- velocità
 - campo di, 6
- viscoelastico, comportamento, 71
- viscosità, 27
 - dinamica, 75
 - cinematica, 75
 - secondo coefficiente di, 76, 171
 - unità di misura, 75
 - volumetrica, 76
- volume di controllo, 37, 39
- volume materiale, 29
- vorticità, 67
 - equazione indefinita di bilancio, 82

- Young, modulo di, 77